

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ АВИАЦИОННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

На правах рукописи

ЧЕРЕМНЫХ СЕРГЕЙ ОЛЕГОВИЧ

УДК 523; 532; 533.951

**ИССЛЕДОВАНИЕ СПОРАДИЧЕСКИХ И
УЛЬТРАНИЗКОЧАСТОТНЫХ ПРОЦЕССОВ ВО
ВНУТРЕННЕЙ МАГНИТОСФЕРЕ ЗЕМЛИ**

05.07.12 – дистанционные аэрокосмические исследования

**Диссертация на соискание научной степени
кандидата физико-математических наук**

**Научный руководитель
Яценко Виталий Алексеевич,
доктор технических наук**

Киев-2015

СОДЕРЖАНИЕ

Список использованных сокращений	5
Введение	6
Актуальность темы	6
Связь работы с научными программами, планами, темами	9
Цель работы	10
Методы исследования	10
Научная новизна	10
Практическая ценность результатов работы	11
Личный вклад соискателя	12
Апробация результатов	12
Публикации по теме диссертации	13
Раздел 1. Долговременные процессы в магнитосфере Земли	14
1.1. Магнитосферные УНЧ-моды	15
1.2. Корональные выбросы масс	20
1.3. Dst-индекс и космическая погода	22
Раздел 2. Основные приближения и модели	28
2.1. Равновесие магнитосферной плазмы	28
2.2. Уравнения малых колебаний для плазмы в дипольном магнитном поле	38
2.3. Бессиловые плазменные конфигурации	45
2.4. Модель магнитосферы как чёрного ящика	47
2.5. Выводы к разделу	53

Раздел 3. Генерация УНЧ возмущений в магнитосфере Земли.....	55
3.1. Собственные УНЧ моды в дипольном магнитном поле.	55
3.2. Затухание тороидальных альфвеновских мод из-за фазового перемешивания.....	58
3.3. Поперечно-мелкомасштабные МГД-волны в дипольном магнитном поле.....	63
3.4. Поляризационные характеристики поперечно-мелкомасштабных МГД-мод.....	67
3.5. Верификация результатов.....	74
3.6. Выводы к разделу.....	81
Раздел 4. Бессиловые магнитные плазменные конфигурации в солнечном ветре.....	83
4.1. Основные уравнения.....	84
4.2. Цилиндрическая трубка.....	87
4.3. Эллипсоид.....	89
4.4. Плазменный тороид.....	93
4.5. Выводы к разделу.....	99
Раздел 5. Вариации магнитного поля Земли и прогнозирование геомагнитных индексов.....	101
5.1. Прогнозирование динамики Dst-индекса на основе билинейной модели.....	101
5.2. Алгоритмы прогнозирования Dst-индекса.....	106

5.3. Анализ прогнозируемости Dst-индекса на основе локальных показателей Ляпунова	109
5.4. Гарантированное прогнозирование Dst-индекса	113
5.5. Выводы к разделу	118
Основные результаты и выводы	120
Благодарности.....	122
Список использованных источников	123
Список публикаций автора	144
Приложения	148

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

AB	Альфвеновская волна
БМЗ	Быстрый магнитный звук
БС	Билинейная система
КА	Космический аппарат
КВМ	Корональный выброс массы
КП	Космическая погода
КТ	Кольцевой ток
ЛС	Линейная система
МГД	Магнитная гидродинамика
ММЗ	Медленный магнитный звук
МП	Межпланетное (магнитное) поле
МПЗ	Магнитное поле Земли
СВ	Солнечный ветер
УНЧ	Ультранизкая частота

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Изучение физических процессов во внутренних областях магнитосферы Земли в последние годы является объектом пристального внимания международного космического научного сообщества. Эти области экранированы от прямого воздействия плазмы солнечного ветра, но их динамика во многом определяется именно воздействием солнечного ветра на магнитосферу.

Взаимодействие магнитосферной плазмы с солнечным ветром приводит к развитию волновых процессов, например таких, как «шипение», «свисты», ленгмюровские и ультранизкочастотные (УНЧ) волны. Изучение УНЧ волн представляет собой особый интерес, поскольку они достаточно легко генерируются, переходят в неустойчивый режим, играют ключевую роль в ряде глобальных событий в магнитосфере Земли, а также принимают непосредственное участие в процессах переноса частиц и энергии. Согласно современным представлениям, периодические УНЧ возмущения геомагнитного поля с периодом от 1 с до 600 с являются одним из основных каналов транспорта энергии из солнечного ветра в магнитосферу Земли. Природа этих возмущений связана с резонансной раскачкой стоячих МГД волн на силовых линиях геомагнитного поля. Эти волны имеют пространственный масштаб, сопоставимый с масштабом магнитосферы и их параметры существенно зависят от геометрии магнитного поля Земли. Один из ключевых элементов «космической погоды» - суббури, согласно существующим представлениям может быть объяснен с помощью УНЧ-волн. Суббури регулярно наблюдаются в околоземном пространстве и сопровождаются большим выделением энергии, инжекцией и ускорением частиц, активизацией полярных сияний и т.д. При этом УНЧ волновые возмущения являются индикаторами различных фаз суббури. Согласно современным представлениям взаимодействие УНЧ волн с замкнутыми горячими частицами может быть триггерным механизмом генерации

суббури. С собственными УНЧ колебаниями также обычно связывают наблюдаемые на Земле геомагнитные пульсации - УНЧ периодические возмущения магнитного поля в магнитосфере. Таким образом, исследование УНЧ возмущений в околоземной плазме является актуальной проблемой, которая имеет как фундаментальное, так и прикладное значение для развития представлений о процессах, протекающих в геофизической плазме.

Наиболее резкие изменения в магнитосфере Земли вызываются спорадическими крупномасштабными плазменными структурами – корональными выбросами массы (КВМ), генерируемыми вблизи поверхности Солнца. КВМ - замкнутая плазменная структура, которая динамично изменяется, двигаясь от Солнца в межпланетное пространство, удовлетворяя условию «вмороженности» магнитного поля, и увеличиваясь в размерах. Облако коронального выброса среды в достаточно большой области пространства вызывает ряд явлений: ударные волны, ускорение солнечных частиц, вспышки радиоизлучения и т.д. Попадание магнитосферы Земли в облако КВМ может сопровождаться резким началом геомагнитной бури, если в облаке присутствует южная компонента магнитного поля. Вопрос о физической природе КВМ является одним из основных в солнечно-земной физике. Современные космические средства позволяют точно измерить только локальные характеристики внутренней структуры КВМ (вдоль траектории движения космического аппарата). Наблюдение с наземных и орбитальных телескопов позволяет оценить ряд интегральных характеристик КВМ: скорость, размеры, форму. Этих данных недостаточно для выяснения глобальной структуры КВМ. Поскольку пространственная магнитная структура КВМ до сих пор неизвестна, то очень важным становится вопрос о структуре возможных магнитоплазменных образований, которые могут самосогласованно двигаться в солнечном ветре, поскольку именно к геометрии таких образований тяготеют КВМ.

Влияние солнечного ветра приводит к спорадическим вариациям геомагнитного поля, которые регистрируются в геомагнитных обсерваториях

и описываются геомагнитными индексами. Наиболее используемые из них: Dst и Kp. Индекс Dst характеризует величину кольцевого тороидального тока во время магнитных бурь, а Kp - уровень флуктуаций магнитного поля. Исследованию зависимости этих индексов от состояния солнечного ветра, а именно его скорости и плотности, а также величины межпланетного магнитного поля (ММП), посвящено большое количество исследований. Эти исследования важны для понимания процессов передачи энергии в цепочке «Солнце - солнечный ветер - магнитосфера Земли - ионосфера Земли - Земля» и представляют практический интерес, связанный с прогнозами «космической погоды». Известно, что при повышении солнечной активности амплитуда вариаций геомагнитного поля возрастает, что может приводить к сбоям в работе космических аппаратов, повреждений телекоммуникационных систем, выводу из строя систем электроснабжения и т.д. Корректный прогноз «космической погоды» позволит предсказать появление геомагнитных бурь и, тем самым, снизить потери от многих катастрофических событий. Для описания процессов развития геомагнитных возмущений обычно используются два подхода. Первый направлен на поиск явной зависимости одного из геомагнитных индексов от параметров солнечного ветра и ММП; второй – на моделирование искомой зависимости методами физической кибернетики. При отсутствии исчерпывающих знаний о взаимодействии солнечного ветра с магнитосферой применения второго подхода обычно дает лучшие результаты. Исследование зависимости Dst-индекса, который, как правило, используется для прогнозирования геомагнитных бурь, от параметров солнечного ветра и ММП показали, что геомагнитная активность, которая характеризуется этим индексом, определяется, в основном z-компонентой ММП и скоростью солнечного ветра. Коэффициент корреляции для модели с такими параметрами достигает около 0,80. Таким образом, существует необходимость в создании моделей, которые более эффективно описывают поведение Dst-индекса во времени для предсказания геомагнитных бурь.

Связь работы с научными программами, планами, темами.

Исследования, изложенные в диссертации, выполнялись в отделе дистанционных методов и перспективных приборов Института космических исследований НАН и ГКА Украины:

– по теме, утвержденной Президиумом НАН Украины «Математическое моделирование динамических процессов в ближнем космосе и гелиосферной плазме на основе спутниковых наблюдений», номер госрегистрации 0110U000228;

– по теме, утвержденной Президиумом НАН Украины "Моделирование, оценка и поддержка принятия решений в интересах осуществления перспективных космических программ", номер госрегистрации 0108U000289;

– по теме, утвержденной Президиумом НАН Украины "Разработать модели физико-химических и гидродинамических процессов в космическом пространстве и методы обработки спутниковых данных", номер госрегистрации 0113U003019;

– по контракту с Президиумом НАН Украины на выполнение НИР «Исследование магнитосферно-ионосферного взаимодействия» в рамках проекта «Резонанс», в рамках целевой комплексной программы НАН Украины по научным космическим исследованиям на 2012 – 2016 гг., номер госрегистрации 0114U003522;

– по контракту с Президиумом НАН Украины на выполнение НИР «УНЧ волновые процессы в плазме ближнего космоса» в рамках целевой комплексной программы НАН Украины «Перспективные исследования по физике плазмы, управляемому термоядерному синтезу и плазменных технологий», номер госрегистрации 0114U003520;

– по контракту с Государственным фондом фундаментальных исследований Украины на выполнение НИР «УНЧ волны и неустойчивости в магнитосфере Земли: теоретические модели для проекта «Резонанс », номер госрегистрации 0113U003662.

Цель данной работы состоит в исследовании генерации спорадических и УНЧ волновых процессов в магнитосфере Земли солнечным ветром, создании аналитических и численных моделей этих процессов, а также поиска их характеристик и условий реализации. Для достижения цели в работе решены следующие задачи:

- получение системы уравнений малых колебаний МГД возмущений в дипольном магнитном поле. Исследование собственных УНЧ мод в плазме внутренней магнитосферы, рассмотрение их поляризации;

- исследование геометрии возможных долгоживущих бессиловых плазменных конфигураций в солнечном ветре, проведение анализа их взаимодействия с магнитосферой Земли на предмет генерации геомагнитных бурь;

- обоснование новых подходов к идентификации нелинейных дискретных динамических моделей для прогнозирования космической погоды. Разработка прогностических моделей поведения Dst-индекса во времени для прогнозирования геомагнитных бурь, а также нового подхода к исследованию поведения геомагнитного Dst-индекса с целью улучшения прогнозирования космической погоды.

Объект исследования – долговременные физические процессы в околоземном космическом пространстве;

Предмет исследования – спорадические и УНЧ процессы во внутренней магнитосфере Земли.

Методы исследования. В диссертации применяются методы теоретической и математической физики, физической кибернетики, а также численные методы.

Научная новизна полученных результатов заключается в том, что в работе впервые:

- получена система уравнений малых колебаний в дипольном магнитном поле, которая последовательно учитывает все основные особенности

геомагнитного поля, продольную и поперечную структуру возмущений, а также описывает распространение всех ветвей МГД волн;

– установлено, что в магнитосферной плазме реализуются УНЧ волны в виде тороидальных и полоидальных мод, зацепленных с медленной магнитозвуковой волной; показано, что волны со «смешанной» поляризацией являются труднореализуемыми;

– открыт эффект затухания тороидальных альфвеновских мод в магнитосферной плазме из-за эффекта перемешивания фаз;

– теоретически определено, что в солнечном ветре могут присутствовать три геоэффективные плазменные структуры, которые могут приводить к генерации магнитосферных бурь;

– предложено использовать билинейные динамические модели для прогнозирования Dst-индекса. Построена модель динамики Dst-индекса и численно показана возможность его прогнозирования на 5 - 6 часов вперед;

– предложен новый подход к прогнозированию Dst-индекса на основе локальных показателей Ляпунова и процедура их вычисления при наличии шумов. Реализована процедура вычисления горизонта прогноза Dst-индекса с использованием спектра локальных показателей Ляпунова.

Практическая ценность результатов работы. Проблемы, рассматриваемые в диссертационной работе, имеют не только фундаментальное, но и прикладное значение, связанное с возможностью объяснения экспериментальных наблюдений УНЧ возмущений в магнитосфере Земли, а также возможностью прогнозирования геомагнитных бурь. Результаты работы могут быть использованы и уже используются в Украине и за рубежом при планировании космических экспериментов, направленных на исследование динамики магнитосферной плазмы, развития геомагнитных бурь, магнитосферно-ионосферных связей и анализе данных спутниковых измерений. С использованием результатов диссертации и при участии автора разработано научное обоснование украинской научной программы в рамках международного проекта «Резонанс». Области

использования результатов – физика плазмы околоземной среды и солнечного ветра, динамика магнитосферы Земли, космическая погода.

Личный вклад соискателя. Все основные результаты, изложенные в диссертации, получены лично автором или при его непосредственном участии.

– в работах [1^а, 3^а] автор принимал участие в постановке задачи, проводил аналитические и численные расчеты, обрабатывал результаты спутниковых измерений, интерпретировал результаты;

– в работах [2^а, 4^а, 8^а, 10^а] автор с применением методов физической кибернетики участвовал в разработке моделей прогнозирования Dst-индекса во времени для предсказания геомагнитных бурь. В работе [8^а] автором был численно реализован метод прогноза Dst-индекса с использованием локальных показателей Ляпунова;

– в работе [5^а] автор участвовал в постановке задачи, проведении математических расчетов и графическом представлении полученных результатов;

– в работе [6^а] автор принимал участие в обсуждении и постановке задачи, получении и интерпретации результатов;

– работа [7^а] выполнена автором единолично;

– в работах [9^а, 11^а- 13^а], которые являются обзорными, автор участвовал в подготовке материалов для публикаций, а именно – своей части текста.

Апробация результатов работы. Основные результаты работы были представлены автором на украинских и международных конференциях:

– 10-я – 13-я Украинские конференции по космическим исследованиям (Крым, Евпатория, 2010 – 2013);

– Конференция молодых ученых «Modern Problems of Theoretical Physics», Киев, (2010г.);

– «UK – Ukraine Meeting on Solar Physics and Space Science», Алушта, (2011г.);

– VII Международной конференции «Вычислительная техника и программирование» им. Академика И.И. Ляшка (2014г.).

Результаты, вошедшие в данную диссертационную работу, также неоднократно обсуждались на научных семинарах отдела дистанционных исследований и перспективных приборов и отдела космической плазмы Института космических исследований НАН и ГКА Украины в 2010 – 2015 годах.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты работы напечатаны в 21 публикации, из которых 11 статей – в рецензируемых журналах, рекомендованных МОН Украины (1 из списка SCOPUS), 2 статьи – в сборниках научных трудов и 8 – в сборниках тезисов и трудов конференций.

РАЗДЕЛ 1. ДОЛГОВРЕМЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ В МАГНИТОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

В последние десятилетия международное космическое научное сообщество всё больше внимания уделяет изучению солнечно-земных связей [4], и, в частности, генерации различных возмущений в магнитосфере Земли. Основным источником этих возмущений являются потоки плазмы (солнечный ветер) которые распространяются от Солнца. Эти возмущения особенно сильно проявляются во время увеличения солнечной активности. Характер поведения космической плазмы в солнечно-земной среде является довольно сложным и непредсказуемым процессом. Вследствие большой сложности этой проблемы её обычно разбивают на отдельные научные проблемы [36], для изучения которых используются различные подходы и модели.

Диссертация посвящена исследованию спорадических вариаций магнитного поля Земли и генерации собственных УНЧ мод магнитосферной плазмы под действием корпускулярной энергии солнечного ветра. Несмотря на то, что внутренние области магнитосферы экранированы от прямого воздействия солнечного ветра, их динамика определяется именно энергией Солнца, которая запасена в солнечном ветре. Работа ограничена исследованием лишь некоторых процессов, обусловленных взаимодействием солнечного ветра с магнитосферой. Однако даже исследование этих процессов является достаточно сложной задачей и в настоящее время не существует законченной картины понимания этих процессов. Можно говорить о возможной роли некоторых процессов в пределах указанной проблемы, которые исследуются как теоретически, так и экспериментально с Земли и со спутников. В данном разделе приведен обзор результатов по проблемам, рассматриваемым в диссертации.

1.1. Магнитосферные УНЧ-моды

Магнитосфера Земли является гигантским естественным резонатором для магнитогидродинамических (МГД) колебаний, которые можно рассмотреть, как комбинацию более мелких МГД-резонаторов и волноводов разных типов. Колебания в этих резонаторах регистрируются как на поверхности Земли, так и в околоземном космическом пространстве в виде ультранизкочастотных (УНЧ) волн с периодами от нескольких секунд до десятков минут [9, 10, 32, 58, 98, 196]. УНЧ колебания являются наиболее масштабными по временным, пространственным и энергетическим проявлениям космической плазмы. Они определяют общую устойчивость магнитосферной плазмы [66, 110, 111] и контролируют коллективные процессы в ней [164]. В частности, как свидетельствуют данные с космических аппаратов (КА), они ответственны за генерацию взрывных процессов в околоземной плазме и на Солнце [62, 181, 182]. Они также могут отвечать за нагрев солнечной короны [191]. Низкочастотные вихревые структуры в ионосфере являются естественным высокочувствительным индикатором состояния «космической погоды» [8] и мощных проявлений геофизических процессов в литосфере и нижней атмосфере Земли. Сегодня они активно изучаются с помощью космических аппаратов для установления триггерных (запускающих) механизмов, ответственных за магнитосферные суббури и магнитные бури, генерацию магнитного поля Солнца и аномальный нагрев солнечной атмосферы. Актуальность данных наблюдений связана с подготовкой нового украинского спутникового эксперимента «Ионосат», а также международных плазменных экспериментов: проекта «Резонанс», RBSP, Cross-Scale. Например, целью эксперимента «Резонанс» является проверка теоретически предсказанных особенностей коллективной динамики плазмы, энергичных частиц и УНЧ волн в околоземном пространстве.

Генерация МГД волн в геокосмическом пространстве во многом обусловлена неоднородностью структуры магнитосферы, на границах которой обычно наблюдается возмущение геомагнитного поля [51, 173, 174]. В начале 60-х годов прошлого столетия в рамках простейшей модели неоднородной магнитосферы с прямыми силовыми линиями магнитного поля, ограниченными двумя идеально проводящими ионосферами [186], было проанализировано распространение быстрой магнитозвуковой (БМЗ) волны поперёк магнитного поля. При совпадении периода БМЗ волны с периодом собственной альфвеновской моды, система уравнений, описывающих взаимодействие этих мод, содержит сингулярность, которая отвечает за резонансную генерацию альфвеновской волны на силовой линии [185, 186]. Этот эффект получил название резонанса на силовых линиях магнитного поля. Магнитосферные альфвеновские резонансы силовых линий магнитного поля с мультигармоническими частотами достоверно наблюдались на космическом аппарате AMPTE/CSE [185] на расстояниях от двух до девяти радиусов Земли. Установлено, что они генерируются в диапазоне частот от 0,001 до 0,1 Гц (диапазон пульсаций Pc3-Pc5) на дневной стороне магнитосферы от плазмопаузы до магнитопаузы [98, 130, 147]. Для резонансных альфвеновских частот получено соотношение масштабирования [58]. В зависимости от поляризации возмущения УНЧ диапазона можно разделить на два типа: тороидальные и полоидальные [3]. Убедительное подтверждение резонансной природы тороидальных периодических возмущений УНЧ диапазона приведено в работах [98, 130], в которых была получена зависимость частот периодических возмущений от параметра Мак-Илвайна [150], полученная в рамках модели резонанса на силовых линиях магнитного поля. В качестве механизма генерации собственных резонансных мод в ряде работ рассматриваются неустойчивость Кельвина-Гельмгольца на магнитопаузе [55, 169, 172], которая реализуется при совпадении частоты поверхностной волны с собственной частотой, внезапные импульсы в динамическом давлении солнечного ветра [2, 53, 89, 132, 186],

квазипериодические возмущения параметров солнечного ветра [132, 148], волноводные моды между магнитопаузой и поверхностью отражения волн в окрестности плазмопаузы [148, 158, 180]. В частности, в работе [53] на основе экспериментальных наблюдений показана возможность генерации как полоидальных, так и тороидальных резонансных возмущений на разных частотах в зависимости от магнитной оболочки после широкополосного возмущения магнитного поля, вызванного внезапным импульсом давления солнечного ветра.

Пространственная структура УНЧ возмущений часто рассматривается в виде плоских волн, что не совсем корректно, поскольку в неоднородной плазме волновой вектор следует рассматривать как производную фазы волны в ВКБ-приближении, то есть как функцию координат. Таким образом, рассмотрение УНЧ возмущений неоднородной плазмы неразрывно связано с изучением пространственной структуры УНЧ мод. Наблюдения на космических аппаратах свидетельствуют о том, что теория УНЧ-возмущений в неоднородной плазме с учётом конечного давления неоднородной плазмы должна быть существенно пересмотрена. Недавно была построена теория УНЧ магнитосферных возмущений [46], в которой было показано, что структура волн в неоднородной плазме непосредственно связана с волноводными областями, ограниченными магнитными поверхностями, где реализуются условия резонансов и отсечек.

Большинство исследований по теории магнитосферных низкочастотных МГД волн проводятся численными методами [61]. Вместе с тем разрабатываются и аналитические подходы [18, 116, 117, 138], с помощью которых удаётся выявить некоторые важные закономерности характеризующие генерацию колебаний магнитосферной плазмы. В настоящее время стало очевидно [15, 16, 86], что картина МГД возмущений магнитосферной плазмы весьма существенно отличается от той, которая обычно рассматривается в модели тонкого плазменного слоя, окружённого ионосферами. Поэтому представляется актуальным разработать подходы для

исследования МГД возмущений, корректно учитывающие специфику магнитосферы Земли, а именно – трёхмерность магнитного поля, кривизну его силовых линий, протекания магнитосферных токов, наличие высокоэнергетических частиц, связь магнитосферных процессов с ионосферными и т.д. [31, 76, 84, 87, 120, 137, 139, 140, 163, 167, 181].

Проблема исследования УНЧ возмущений в магнитосфере тесно связана с условием устойчивости магнитосферной плазмы, исследованием суббурь [16, 121] и прогнозированием «космической погоды», поскольку УНЧ-возмущения ответственны за крупномасштабные коллективные движения, процессы переноса в магнитосфере и генерацию пульсаций Pc2-Pc5. В третьем разделе анализируется проблема генерации и поляризации УНЧ МГД возмущений в плазме с конечным давлением в околоземной магнитной ловушке. Эта проблема в общем случае является сложной и её не всегда возможно исследовать до конца. По этой причине для её решения применяются хорошо апробированные подходы и модели, чтобы можно было аккуратно проследить, какие новые эффекты получаются при их рассмотрении. Мы исследуем проблему генерации УНЧ МГД возмущений, используя в качестве модели геомагнитного поля дипольное магнитное поле. Кроме того, как и в упомянутом разделе, мы ограничимся рассмотрением только равновесных конфигураций магнитосферной плазмы, учитывающих тороидальный ток. Это позволит аналитически достаточно подробно исследовать эти моды. Отметим, что возмущение поперечно-мелкомасштабного типа в последнее время экспериментально наблюдается с помощью космических аппаратов.

Для анализа волновых УНЧ возмущений в магнитосфере Земли необходимо рассмотреть равновесную геомагнитную плазменную конфигурацию. Известно [20], что время существования магнитосферной плазмы в спокойном состоянии много больше характерных времён возмущений в ней [6]. В обычных условиях эта разница достигает 7–8 порядков величин. Следовательно, плазма в магнитосфере должна

находиться либо в стационарном состоянии с установившейся конвекцией, либо в состоянии магнитоэлектростатического равновесия. Вопрос о наличии стационарных конвективных движений и их роли в удержании магнитосферной плазмы до сих пор остаётся до конца не исследованным. Однако с точки зрения длительного существования магнитосферы стационарная конвекция играет второстепенную роль. Учёт конвекции имеет характер поправок к основному магнитоэлектростатическому состоянию плазмы. Поэтому представляется актуальным проанализировать – можно ли их использовать для описания равновесия магнитосферной плазмы в систему уравнений магнитоэлектростатики. При моделировании возмущений в магнитосфере важную роль играет пространственное распределение макроскопических параметров плазмы и токовых структур в ней. В магнитосфере Земли присутствуют различные токовые системы [4, 6, 12]. Именно из-за этих систем магнитное поле Земли отличается от магнитного поля диполя. В свою очередь, токовые системы вокруг Земли ещё не изучены достаточно и не могут быть использованы для адекватного описания всех процессов в магнитосфере. Одной из таких систем являются токи, противоположно направленные и имеющие вид колец, расположенных вокруг экватора [47, 79]. Их наличие приводит к смещению силовых линий магнитного поля. Считается, что от 2 до 3 радиусов Земли ток положительный, а от 3 до 10 радиусов Земли – отрицательный. С другой стороны из наблюдений на космических аппаратах известно, что плазменное давление на участке от 2 до 3 радиусов Земли нарастает и, проходя через максимум на расстоянии 3 трёх радиусов Земли, плавно спадает. Указанные особенности поведения приэкваториальных токов должны быть последовательно учтены в модели магнитоэлектростатического равновесия магнитосферной плазмы. Необходимость такого рассмотрения обусловлена небольшим количеством работ по этому вопросу. К настоящему времени известны только две работы по равновесию плазмы в дипольном магнитном поле, которое хорошо аппроксимирует реальное геомагнитное поле до шести радиусов Земли. Это работа [85], в

которой численно было исследовано равновесие магнитосферной плазмы, и работа [81], в которой равновесие плазмы задавалось аналитически с использованием вариационного метода Ритца. Результаты этих работ находятся в противоречии друг с другом, поскольку в работе [81] было получено решение с убывающим профилем давления, а в работе [85] было получено решение с профилем давления, близким к функции Гаусса. В разделе 2 будет показано, что в исследованиях по УНЧ возмущениям можно использовать приближение магнитостатического равновесия и магнитного поля в виде диполя с вложенными магнитными поверхностями.

1.2. Корональные выбросы масс

Известно [162], что Солнце теряет часть своей массы в результате сложных динамических процессов в его атмосфере, вызывающих ускорение частиц плазмы до скоростей, позволяющих преодолеть силы тяготения. Потеря массы Солнца происходит двумя путями: через потоки спокойного солнечного ветра, внутри которого могут распространяться ударные волны, ускоряющие частицы [49, 56, 135], и в форме спорадического извержения крупномасштабных плазменных структур, так называемых корональных выбросов массы (КВМ). Генерации КВМ в среднем происходят с частотой раз в сутки и сопровождаются, наравне с солнечными вспышками, наиболее мощными спорадическими изменениями массы в солнечной короне [21, 60, 75]. Уносимая ими масса составляет примерно 1% от той, что выносится солнечным ветром через корональные дыры или 10% от той, что выносится через активные области.

Корональные выбросы масс впервые наблюдались в окрестности Солнца в начале 1970-х, хотя теоретически их существование было предсказано раньше [8, 21]. Известно, что существует два качественно разных класса КВМ – градиентные (медленные) и импульсные (быстрые) КВМ, которые принадлежат к разным классам, отличающихся своими динамическими

характеристиками [146, 183]. Градиентные КВМ движутся со скоростью солнечного ветра, тогда как скорость импульсных КВМ значительно превышает скорость солнечного ветра.

Типичные характеристические размеры большинства КВМ вблизи поверхности Солнца следующие [8, 21, 36]. Средний угловой размер КВМ составляет 47ϵ и сильно варьируется от случая к случаю, средняя долгота точки старта – 35ϵ . Большинство КВМ имеют яркую переднюю кромку, тёмную лагуну и яркое ядро. Необходимо отметить, что до сих пор экспериментальное изучение КВМ находится на стадии скорее морфологической, чем количественной [94]. Связанно это с рядом причин, и, в частности, с тем обстоятельством, что при наблюдении КВМ в оптическом диапазоне, видна не его истинная трёхмерная структура, а только проекция на картинную плоскость.

В потоке солнечного ветра, достигающего орбиты Земли, встречаются особые неоднородности, которые классифицируются как магнитные облака [173, 193, 197]. Они характеризуются повышенным значением магнитного поля и медленным вращением вектора магнитного поля за время порядка одного дня. Связь магнитных облаков и корональных выбросов была заподозрена сразу после их открытия, поскольку облака появлялись через два-три дня после того, как на Солнце наблюдался корональный выброс массы. Эта связь была подтверждена позднее многочисленными наблюдениями. Далее мы будем считать, что оба этих понятия эквивалентны. Столкновения магнитных облаков с земной магнитосферой вызывают магнитные бури [13, 14, 110, 111, 164]. Причём геоэффективность конкретного облака, т.е. возможность произвести магнитную бурю, зависит от скорости и направления магнитного поля [68]. Из наблюдательных данных известно, что потоки солнечного ветра, несущие магнитное поле, направленное на юг, т.е. противоположно земному магнитному полю, инициируют магнитные бури (см. подробнее подраздел 1.3). Таким образом, для прогнозирования состояния магнитосферы необходима регистрация

появления коронального выброса на Солнце, также необходимо знать скорость и траекторию магнитного облака, а также направление магнитного поля в нём.

Ввиду изложенного, разработка модели КВМ, в рамках которой удастся качественно и количественно описать наблюдаемые характеристики КВМ, представляется актуальной. Несмотря на то, что данная проблема изучается на протяжении более двух десятков лет, механизмы возникновения и эволюции КВМ остаются до сих пор неясными [64, 83, 118, 131]. Существующие теоретические модели КВМ не описывают всю совокупность наблюдательных данных при формировании КВМ [63, 94, 136, 192]. Практически отсутствуют объяснения аномальной устойчивости КВМ в солнечном ветре.

Мы не будем интересоваться условиями генерации КВМ на Солнце [63, 189, 193], а основное внимание уделим геометрии магнитных полей в магнитных облаках, подразумевая, как отмечалось выше, что последние являются модифицированными в КВМ в потоке солнечного ветра, т.е. нас будут интересовать замкнутые плазменные магнитные образования, движущиеся в потоке солнечного ветра.

1.3. Dst-индекс и космическая погода

Одна из наиважнейших задач в прогнозировании состояния космической погоды состоит в прогнозировании геомагнитной активности, поскольку именно она определяет динамику наиболее масштабных процессов в магнитосфере [25]. На сегодняшний день существует несколько количественных показателей геомагнитной активности [149], среди которых наиболее распространёнными являются шторм-тайм вариация геомагнитного поля Dst и планетарный индекс геомагнитной активности Kp [176, 184, 187]. Выбор конкретного индекса и его сопоставление с определённым физическим процессом является задачей, которая требует серьёзного

предварительного исследования [149]. Поэтому необходимой составляющей исследования космической погоды является прогнозирование поведения показателей геомагнитной активности (индексы Kp, Ap, Dst и др.).

Достаточно очевидно, что адекватное моделирование всех процессов, приводящих к развитию геомагнитных бурь – чрезвычайно сложная задача. Все попытки прогнозирования состояния космической погоды на основании физических моделей не дали никаких результатов. Поэтому для моделирования развития геомагнитных бурь используются альтернативные подходы (см., например, [108]). При отсутствии полной модели воздействия солнечного ветра на амплитуду геомагнитного поля, применение методов физической кибернетики предоставляет достаточно хорошие результаты. Одним из критериев достоверности моделей взаимодействия солнечного ветра с магнитосферой Земли, которые строятся в рамках этих методов, выступает коэффициент корреляции между данными наблюдений Dst-индекса и их расчётными значениями. Из спутниковых исследований известно, что геомагнитная активность, характеризующаяся Dst-индексом, в большинстве случаев определяется южной z-компонентой межпланетного магнитного поля (ММП) и скоростью солнечного ветра. Коэффициент корреляции для модели, построенной с использованием этих параметров, может достигать и даже превышать значение 0,85. Таким образом, представляется целесообразным строить и уточнять модели, которые аккуратно учитывают нелинейные эффекты взаимодействия солнечного ветра с магнитосферой и адекватно описывают поведение Dst-индекса.

Прогнозирование космической погоды является сложной и нетривиальной задачей, поскольку моделирование всей совокупности процессов, приводящих к развитию геомагнитных возмущений, практически нереально. Проблема заключается в том, что цепочка «Солнце – солнечный ветер – магнитосфера Земли» представляет собой сложную, динамичную систему, в которой развиваются сложные нелинейные процессы. Полная информация о состоянии этой неравновесной системы не доступна. Поэтому,

для моделирования развития геомагнитных возмущений применяют различные подходы, используемые в физической кибернетике и базирующиеся на анализе временных рядов данных, измеряемых на космических аппаратах. Общим для этих методов является один признак: все они рассматривают магнитосферу как «черный ящик», для которой рассчитываются входные и выходные параметры. На данном этапе исследований эти методы дают лучшие результаты. При этом в рамках этих методов автоматически строятся феноменологические модели взаимодействия солнечного ветра с магнитосферой Земли. Конкретные реализации этих методов разнообразны: нейронные сети, теория оптимизации, корреляционный анализ, регрессионный анализ и т.д. С помощью динамико-информационного анализа [203] удалось построить феноменологические модели, которые обеспечивают прогноз поведения Dst-индекса на 6 часов вперед заранее при точности прогнозирования 90%.

Магнитные бури фиксируются с самого начала непрерывного наблюдения за магнитным полем Земли с начала работы и сети магнитных обсерваторий. Количественно возмущения магнитного поля Земли описываются индексом Dst (disturbance storm index) [78, 131, 159, 160]. Его численное значение соответствует усреднённой величине отклонения тангенциальной составляющей наземного магнитного поля в приэкваториальной зоне. Напряжённость магнитного поля измеряют четыре геомагнитные обсерватории, расположенные около экватора, где эффект бури проявляется наиболее чётко. Магнитные бури со значениями Dst 50–150 нТл происходят каждый месяц. Несколько раз за год фиксируют мощные бури с Dst порядка 150–300 нТл и всего несколько раз за солнечный цикл случаются сверхмощные бури с Dst лежащем в интервале 300–500 нТл. Для упрощения статистики бурь индекс Dst проградуирован по бальной системе по индексу Ap – планетарного магнитного поля.

Статистическим анализом доказано [13, 14, 204], что магнитные бури в 65% случаев связаны с корональными выбросами массы, в 22% – с

отдельными КВМ и в 13% – с прохождениями Земли сквозь передний край потока солнечного ветра из корональных дыр. Долготекущие бури вызваны исключительно «магнитными облаками», которые распространяются в МП от мощных, которые иногда идут след в след, выбросов. Коэффициент корреляции между количеством КВМ и долго-текущими бурями составляет 0,78.

Возмущения геомагнитного поля связано с увеличением кольцевого тока [104 – 106] в магнитосфере. Кольцевой ток (КТ) существует всегда на радиальном расстоянии $3-5 R_E$ от Земли, однако его величина изменяется в зависимости от скорости солнечного ветра и направления межпланетного магнитного поля [43, 114]. Он состоит из частиц плазмы захваченных земной магнитосферой из СВ плазмы, удерживаемой МПЗ [103]. Во внешнем магнитном поле, которым для частиц плазмы является собственное магнитное поле Земли, положительно заряженные ионы (в основном ядра водорода) и отрицательно заряженные электроны плазмы движутся (дрейфуют) в противоположных направлениях вокруг Земли и электрический ток генерируется в направлении движения часовой стрелки, если смотреть на Землю с северного полюса [155]. Измерения со спутников показали [102], что во время магнитных бурь потоки частиц КТ возрастают в 10–100 раз. Основной вклад в энергию КТ во время бурь принадлежит ионам, вклад электронов не превышает 20% [50, 54, 104].

Кольцевой ток генерирует магнитное поле, силовые линии имеют южное направление, силовые линии которого имеют южное направление. Накладываясь на земное поле, направленное на север, поле кольцевого тока ослабляет его, вызывая так называемую депрессию магнитного поля [144]. Чем интенсивней кольцевой ток, тем больше смещение приповерхностного магнитного поля. Отметим также, что кроме КТ, который вносит основной вклад, на приповерхностные возмущения магнитного поля (Dst) влияет также интенсивность токов хвостовой части магнитосферы.

При прогнозировании Dst-индекса крайне актуальной является задача поиска адекватной математической модели прогнозируемой величины. Для решения этой задачи мы будем использовать модель нелинейного «чёрного ящика» [143]. В рамках этой модели основное внимание уделяется глобальным динамическим и информационным характеристикам солнечного ветра и магнитосферы, что существенно отличает предлагаемый метод от широко используемых статистических и аналитических методов, применяемых в физике. Принципиальным моментом используемого метода нелинейного «чёрного ящика» для задачи прогнозирования является использование в качестве входных данных временных рядов только для двух параметров солнечного ветра, а в качестве выходных – только временного ряда для Dst-индекса [59, 68, 187].

Dst-индекс был введен Сугиурой в 1964 г. [184]. Благодаря ясному физическому смыслу (этот индекс характеризует интенсивность симметричного кольцевого тока, типичного для восстановительной фазы магнитной бури) он быстро завоевал заслуженное признание. Этот индекс представляет среднюю величину возмущения в часовом интервале, вычисленную по данным сети низкоширотных станций, разнесенных по долготе. Единица измерения Dst-индекса – гамма (γ , 1 гамма = 10^{-5} эрстед).

Для вычисления Dst-индекса сначала использовали данные Н-компоненты восьми станций, довольно равномерно распределённых в полосе широт $\Phi = \pm(10^\circ \div 40^\circ)$ (чтобы исключить возможное влияние экваториального и полярного электроджетов). В целях более быстрого получения Dst -индекса, в дальнейшем число станций было сокращено до четырех: Гонолулу, Сан-Хуан, Херманюс, Какиока.

В магнитоспокойный день численная величина Dst-индекса лежит в интервале от -20γ до $+20\gamma$ и с ростом геомагнитной активности увеличивается в сторону отрицательных значений. Так, например, во время исключительно большой геомагнитной бури 11 февраля 1958 г. Dst-индекс

достиг величины, равной -409γ . Dst-индекс регулярно вычисляется в Годдаровском центре космических полетов (США) и публикуется в специальных бюллетенях в виде таблиц и графиков среднечасовых значений.

РАЗДЕЛ 2. ОСНОВНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И МОДЕЛИ

В данном разделе описаны основные приближения и базовые модели плазмы в системе «солнечный ветер - магнитосфера Земли», которые являются исходными для исследований, представленных в диссертационной работе.

2.1. Равновесие магнитосферной плазмы*

Как отмечалось в Разделе 1, в магнитосферной плазме могут развиваться коллективные процессы, такие как колебания и неустойчивости. Прежде, чем переходить к анализу волновых УНЧ возмущений в магнитосфере Земли, рассмотрим равновесную геомагнитную плазменную конфигурацию и покажем, что в дальнейших исследованиях можно использовать простейшую криволинейную модель магнитного поля Земли – диполь с магнитными поверхностями. Мы покажем, что эта модель учитывает все основные особенности поведения плазмы в геомагнитном поле и хорошо аппроксимирует реальное магнитное поле Земли до расстояний порядка шести радиусов.

Ниже мы рассмотрим вопрос о распределении равновесного давления плазмы в дипольном поле и сравним полученный результат с другими результатами других работ. Для получения исходных уравнений воспользуемся уравнением магнитостатического равновесия магнитосферной плазмы [23]

$$\nabla P = \vec{j} \times \vec{B}. \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) записана в системе единиц Хевисайда-Лоренца, которая получается введением нормировок

* В данном подразделе использованы результаты работы [1^a].

$$\vec{B} = \vec{B}^{(CFC)} / \sqrt{4\pi}, \quad \vec{j} = \vec{j}^{(CFC)} \sqrt{4\pi}/c,$$

где индексом (CFC) обозначены величины в системе единиц СГС. Здесь использованы следующие обозначения: P – давление, $\vec{j} = j \cdot \vec{e}_\varphi$ – кольцевой тороидальный ток, $\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_\varphi \vec{e}_\varphi$ – напряжённость магнитного поля. Ток и магнитное поле записаны в сферической системе координат (r, θ, φ) , которую будем использовать ниже. Умножив обе части (2.1) скалярно на \vec{B} , получаем

$$\vec{B} \cdot \nabla P = 0. \quad (2.2)$$

Поскольку магнитное поле можно считать осесимметричным ($\partial/\partial\varphi = 0$), то с учётом этого обстоятельства уравнение $div\vec{B} = 0$ в рассматриваемой системе координат принимает вид

$$div\vec{B} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial(r^2 \sin\theta B_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin\theta B_\theta)}{\partial\theta} \right] = 0.$$

Здесь угол θ отсчитывает от положительного направления оси z , а r – от оси x , где (x, y, z) декартова система координат. Введём к рассмотрению функцию $\psi(r, \theta)$, такую, что

$$B_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad B_\theta = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial r}. \quad (2.3)$$

При этом уравнение $div\vec{B} = 0$ удовлетворяется тождественно. Легко убедиться, что функция ψ имеет смысл полоидального магнитного потока.

Подставляя (2.3) в (2.2), получаем равенство

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial P}{\partial r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \frac{\partial P}{\partial\theta} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right] = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \{P, \psi\}_{r, \theta} = 0, \quad (2.4)$$

где $\{P, \psi\}_{r, \theta}$ – скобка Пуассона. Из общих свойств этих скобок [27] следует, что давление является произвольной функцией ψ , т.е.

$$P = P(\psi). \quad (2.5)$$

Тогда, с учётом (2.5) уравнение (2.1) можно представить в виде

$$\nabla P = \frac{dP}{d\psi} \nabla \psi = -jB_\theta \vec{e}_r + jB_r \vec{e}_\theta,$$

или, что, то же самое

$$\nabla P = \frac{dP}{d\psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right) = j \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right].$$

Сравнивая левые и правые части полученного уравнения, находим, что оно удовлетворяется при условии

$$j = r \sin \theta \frac{dP}{d\psi}. \quad (2.6)$$

С другой стороны из уравнения Ампера в МГД приближении [17, 23, 37] следует

$$j = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial r B_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right]. \quad (2.7)$$

Подставляя (2.3) в (2.7), получаем

$$\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \text{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = -j. \quad (2.8)$$

В результате из (2.6) и (2.8) получаем следующую систему уравнений для описания магнитоэстатического равновесия магнитосферной плазмы

$$\begin{cases} j = r \sin \theta \frac{dP}{d\psi}, \\ \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \text{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = -j. \end{cases} \quad (2.9)$$

Эти уравнения сводятся к нелинейному уравнению типа Грэда-Шафранова [28].

При изучении поведения плазмы в магнитосфере предлагались различные модели для описания кольцевого тока и давления. Так, например, проблема магнитосферного равновесия исследовалась в работе [85], в которой решалось уравнение типа (2.9) для давления вида

$$P(\psi) = P_0 \left[(\psi_2 - \psi) / \gamma \right]^\gamma \left[(\psi - \psi_1) / \delta \right]^\delta / \left[(\gamma + \delta) / (\psi_2 - \psi_1) \right]^{\gamma + \delta}$$

Здесь γ и δ – некоторые константы, Ψ_1 и Ψ_2 – заданные функции поверхности магнитного потока. В результате численного решения уравнения магнитостатики был получен график распределение давления на расстоянии от 2 до $10R_E$, где R_E – радиус Земли. Поставим перед собой задачу определения плазменного давления на расстоянии от 2 до 10 земных радиусов. При этом зададимся априори не распределением давления, как в [85], а распределением кольцевого тока.

Как отмечалось выше, в магнитосферной плазме в экваториальной области ток течёт в положительном направлении при $2R_E \leq r \leq 3R_E$, и в отрицательном – при $3R_E \leq r \leq 10R_E$. Удобно для дальнейшего анализа представить этот ток в следующем виде

$$j = A \sin k(\eta - \phi), \quad (2.10)$$

где $\eta = \frac{r}{3R_E} \sin \theta$, k – произвольный волновой вектор, ϕ – фазовый сдвиг.

Параметры A , k и ϕ будем выбирать исходя из значений тока на концах интервала. При $r = 2R_E$ и при $r = 3R_E$ положительный ток обращается в ноль, откуда видно, что $k = 3\pi$, $\phi = \frac{2}{3} \sin \theta$. В результате выражение (2.10) примет следующий вид:

$$j = A_1 \sin 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right) \sin \theta, \quad (2.11)$$

где $\rho = r/3R_E$. Для нахождения решения уравнения (2.9) положим $\psi = F(\eta)$, $j = \eta \Phi(\eta)$, где $\eta = \rho \sin \theta$, и после подстановки этих выражений в (2.9), получим уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial F}{\partial \eta} = -A_1 \eta \sin 3\pi \left(\eta - \frac{2}{3} \right). \quad (2.12)$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{d^2 F}{d\eta^2} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0. \quad (2.13)$$

Его решение имеет вид

$$F = C_1 \frac{\eta}{2} + C_2. \quad (2.14)$$

Для нахождения общего решения уравнения (2.12) считаем, что величины C_1 и C_2 являются функциями η и, используя метод вариации постоянных [7], получаем

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{A_1}{3\pi} \cos 3\pi \left(\eta - \frac{2}{3} \right) + M, \\ C_2 &= \frac{A_1}{6\pi} \left\{ \frac{2\eta}{3\pi} \sin 3\pi \left(\eta - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{2}{(3\pi)^2} - \eta^2 \right) \cos 3\pi \left(\eta - \frac{2}{3} \right) \right\} + N. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь M и N – произвольные постоянные. Тогда общее решение для функции $\psi = F(\eta)$ имеет вид

$$\psi(\eta) = F(\eta) = \frac{A_1}{6\pi} \left[\frac{2\eta}{3\pi} \sin 3\pi \left(\eta - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{(3\pi)^2} \cos 3\pi \left(\eta - \frac{2}{3} \right) \right] + M \frac{\eta^2}{2}. \quad (2.16)$$

Поскольку функция ψ определяется с точностью до константы, поэтому без ограничения общности можно положить $N = 0$.

Из уравнения (2.9) следует

$$\frac{\partial P}{\partial \psi} = \frac{1}{\eta} j = \frac{1}{\eta} A_1 \sin 3\pi \left(\eta - \frac{2}{3} \right). \quad (2.17)$$

Легко видеть, что на экваторе для давления $P(\rho)$ справедливо следующее равенство

$$\frac{\partial P}{\partial \psi} = \frac{dP}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \psi} = \frac{A_1}{\rho} \sin 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right), \quad (2.18)$$

откуда следует

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{A_1}{\rho} \sin 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \quad (2.19)$$

Выражение для величины $\frac{\partial \psi}{\partial \rho}$, можно получить из (2.16):

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \left[\frac{A_1}{3\pi} \cos k \left(\rho - \frac{2}{3} \right) + M \right] \rho. \quad (2.20)$$

Подставляя (2.20) в (2.19), находим:

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = A_1 \sin 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right) \left[\frac{A_1}{3\pi} \cos k \left(\rho - \frac{2}{3} \right) + M \right]. \quad (2.21)$$

Проанализируем полученное выражение. На интервале $(\rho_0, \rho_1) = \left(\frac{2}{3}, 1 \right)$ справедливо неравенство $\sin 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right) \geq 0$, а величина $\cos 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right)$ на этом же интервале $\left(\frac{2}{3}, 1 \right)$ меняет знак, поскольку $\cos 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right) < 0$ выполняется при $\rho - \frac{2}{3} > \frac{1}{6}$. Поэтому, если произвольную постоянную M выбрать большую, чем $\frac{A_1}{k} = \frac{A_1}{3\pi}$, то величина $\frac{\partial P}{\partial \rho}$ будет положительной на всём интервале, что соответствует положительному значению тока. Заметим, что $\frac{\partial P}{\partial \rho}$ обратится в ноль на конце интервала, то есть давление достигнет максимума на конце интервала.

Чтобы найти выражение для давления, проинтегрируем уравнение (2.21), в результате получим

$$P = -\frac{A_1^2}{(3\pi)^2} \cos^2 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right) - \frac{A_1 M}{3\pi} \cos 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right) + P_0. \quad (2.22)$$

Поскольку рассмотрение проводится в экваториальной области, $\sin \theta \approx 1$. Для удобства дальнейших расчетов положим $M = \frac{A_1}{3\pi}$, тогда давление на участке $(\rho_0, \rho_1) = \left(\frac{2}{3}, 1 \right)$ зависит только от одной произвольной постоянной A_1 .

$$P = -\frac{A_1^2}{9\pi^2} \left[\frac{1}{2} \cos^2 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right) + \cos 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right) + 1 \right] + P_0. \quad (2.23)$$

Перейдём к нахождению давления на интервале $3R_E \leq r \leq 10R_E$ (или в безразмерных переменных при $1 \leq \rho \leq \frac{10}{3}$). Будем использовать то же самое выражение (2.10) для тока, $j_\phi(r)$, которое теперь будем рассматривать на интервале $(\pi, 2\pi)$. После перерасчёта k и ϕ , как это было сделано выше, получаем

$$j = A_2 \sin \frac{3}{7} \pi \left(\eta + \frac{4}{3} \right). \quad (2.24)$$

Аналогично предыдущему случаю, находим следующие выражения:

$$\psi = \frac{A_2}{\frac{6}{7}\pi} \left[\frac{14\eta}{3\pi} \sin \frac{3}{7} \pi \left(\eta + \frac{4}{3} \right) + \frac{2}{\left(\frac{3}{7}\pi\right)^2} \cos \frac{3}{7} \pi \left(\eta + \frac{4}{3} \right) \right] + \frac{Q\eta^2}{2}, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \left[\frac{A_2}{\frac{3}{7}\pi} \cos \frac{3}{7} \pi \left(\eta + \frac{4}{3} \right) + Q \right] \rho,$$

где Q – положительная постоянная,

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = A_2 \sin \frac{3}{7} \pi \left(\rho + \frac{4}{3} \right) \left[\frac{B}{\frac{3}{7}\pi} \cos \frac{3}{7} \pi \left(\rho + \frac{4}{3} \right) + Q \right]. \quad (2.26)$$

Используя (2.25) и (2.26), находим давление на исследуемом интервале

$$P = \frac{A_2^2}{\left(\frac{3}{7}\pi\right)^2} \left[\sin^2 \frac{3\pi}{7} \left(\rho + \frac{4}{3} \right) - \cos \frac{3\pi}{7} \left(\rho + \frac{4}{3} \right) + 1 \right] + P_0. \quad (2.27)$$

Для сшивки решений на обоих интервалах положим $A_1 = A_2$ при $\rho = 1$ и $P = P_0$ при $\rho = \frac{10}{3}$. Таким образом, искомое давление описывается уравнениями (23)

и (27) на интервале от $2R_E$ до $10R_E$ и имеет вид, изображённый на рис.2.2.

Сравним полученное решение (2.23) и (2.27) с наблюдательными данными, а также с численными расчётами работы [85]. На рис.2.2

представлена зависимость давления от параметра Макелвайна $L = 3\rho = r/R_E$. Сплошная линия соответствует результату, полученному в [85].

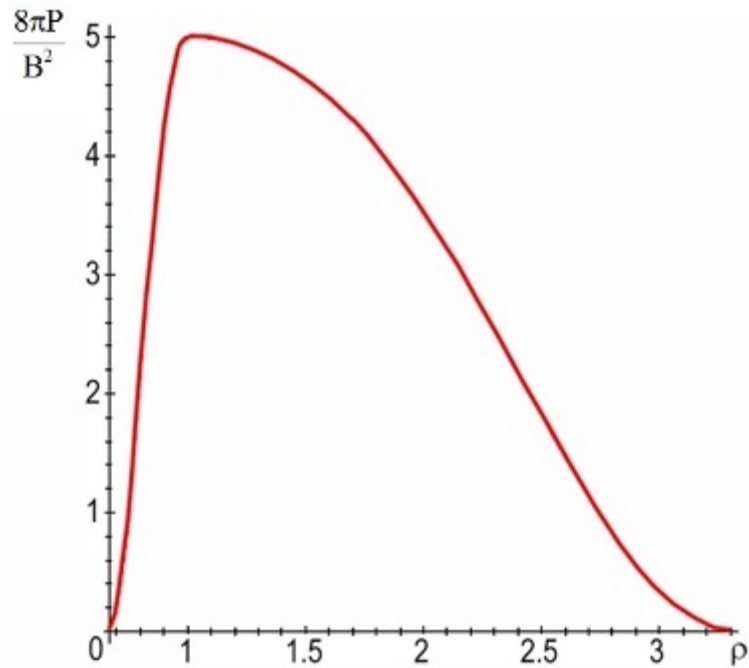


Рис. 2.1. Результирующее распределение давления на интервале

$$\frac{2}{3} < \rho < \frac{10}{3} \quad (2R_E \leq r \leq 10R_E).$$

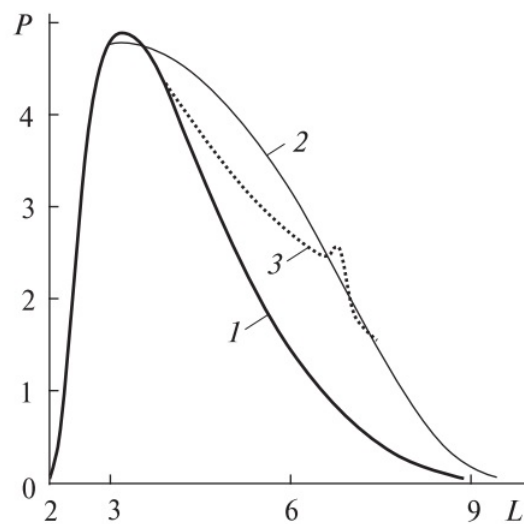


Рис. 2.2. Распределение давления в магнитосфере. Сплошная кривая – результат работы [85], сплошная тонкая кривая – полученная зависимость, пунктир – экспериментальные данные.

Пунктиром отмечены экспериментальные данные [144], полученные на КА АМРТЕ/ССЕ. Сплошной тонкой линией отмечена полученная зависимость. Видно, что на участке от $2R_E$ до $3R_E$, все три зависимости практически совпадают.

На расстояниях $3R_E \leq r \leq 10R_E$ экспериментальная зависимость проходит выше зависимости, полученной в [85] и ниже зависимости, полученной в настоящей работе.

Из изложенного следует, что модель магнитостатического равновесия магнитосферной плазмы приводит к результатам, которые удовлетворительно согласуются с данными с космических аппаратов и с результатами численным расчетов.

Легко убедиться, что в вакууме ($j \square dp/d\psi = 0$) решения уравнения (2.9) имеет вид

$$\psi = \psi_D = \frac{M \sin^2 \theta}{r}, \quad (2.28)$$

где M – дипольный момент Земли, описывает дипольное магнитное поле B_D в этом случае магнитное поле в соответствии с (2.3) имеет компоненты

$$B_r = \frac{2r \cos \theta}{r^3}, \quad B_\theta = -\frac{M \sin \theta}{r^3}$$

и может быть представлено в виде

$$\vec{B}_D = [\nabla \psi_D \times \nabla \varphi]. \quad (2.29)$$

Здесь учтено, что $\nabla \varphi = \vec{e}_\varphi / r \sin \theta$ и дипольное магнитное поле является осесимметричным ($\partial/\partial \varphi = 0$).

Из измерений с космических аппаратов известно [19, 21], что реальное магнитное поле Земли в основном определяется внутренними электрическими токами и приближенно может быть описано мультипольным разложением, в котором заметно преобладает дипольный член. Поэтому это поле с хорошей точностью (приблизительно до 5 – 6 земных радиусов от поверхности Земли) можно рассматривать в виде магнитного диполя.

Магнитное поле (2.29) является безвихревым и удовлетворяет уравнению

$$\text{rot}\vec{B}_D = 0.$$

Полагая

$$\vec{B} = \vec{B}_D + \vec{B}_1,$$

где магнитное поле \vec{B}_1 связано с распределением давления по магнитосфере, из уравнения (2.1) получаем уравнение гидростатического равновесия в виде

$$\nabla P = \left[\vec{j}_1 \times \vec{B}_D \right] + \left[\vec{j}_1 \times \vec{B}_1 \right], \quad \vec{j}_1 = \text{rot}\vec{B}_1.$$

Видно, что это уравнение, как и уравнение (2.9), является нелинейным.

Сейчас мы рассмотрим, и в дальнейшем будем использовать упрощённую модель магнитостатического равновесия в предположении малости давления плазмы. Если пренебречь квадратичными по давлению слагаемыми, то уравнение равновесия примет вид

$$\nabla P = \left[\vec{j}_1 \times \vec{B}_D \right]. \quad (2.30)$$

Из (2.30) следует $\vec{B} \cdot \nabla P = 0$, т.е.

$$P = P(\psi_D). \quad (2.31)$$

Также справедливо равенство

$$\vec{j}_1 \cdot \vec{B}_D = 0, \quad (2.32)$$

где

$$\vec{j}_1 = \frac{\left[\vec{B}_D \times \nabla P \right]}{\left| \vec{B}_D \right|^2} = \frac{dP}{d\psi_D} r \sin \theta \vec{e}_\varphi. \quad (2.33)$$

Из условия замыкания токов, $\text{div}\vec{j}_1 = 0$, в предположении, что равновесный продольный ток отсутствует, получаем

$$\left[\vec{B}_D \times \nabla \psi_D \right] \cdot \nabla B_D = 0. \quad (2.34)$$

В частности, поскольку $\vec{B}_D \cdot \nabla \psi_D = \vec{B}_D \cdot \nabla \vec{e}_\varphi = 0$, то силовые линии магнитного поля и линии постоянного магнитного поля совпадают. Поэтому величина $dP/d\psi_D$ является постоянной вдоль силовой линии магнитного

поля и, следовательно, ток (2.33) имеет максимальное значение на экваторе ($\theta = \pi/2$) и, кроме того, выражение (2.33) правильно описывает восточный и западный кольцевые токи, текущие в магнитосфере [25]. Всё изложенное свидетельствует о том, что рассмотренная нами довольно простая модель магнитостатического равновесия правильно описывает основные наблюдаемые явления, и может быть использована для изучения УНЧ возмущений в магнитосфере. Она также качественно описывает равновесие плазмы и при конечном давлении. Соотношения (2.30) – (2.34) будут использоваться в следующем подразделе при получении уравнений малых колебаний.

2.2 Уравнения малых колебаний для плазмы в дипольном магнитном поле*

Для исследования УНЧ возмущений, наблюдаемых с космических аппаратов в земной магнитосфере [180], необходимо получить уравнения малых колебаний. Для вывода этих уравнений исходим из уравнений малых возмущений равновесного магнитостатического состояния плазмы в МГД приближении [5,17,38, 60, 190]

$$\begin{aligned} \rho\omega^2\vec{\xi} &= \nabla\delta p + [\vec{b} \times \vec{j}] + [\vec{B} \times \text{rot}\vec{b}], \\ \delta p + \vec{\xi} \cdot \nabla p + \gamma p \text{div}\vec{\xi} &= 0, \\ \vec{b} &= \text{rot}[\vec{\xi} \times \vec{B}]. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Здесь использованы следующие обозначения: \vec{j} , \vec{B} , – равновесные плотность тока и вектор индукции магнитного поля, ρ и p – плотность и давление плазмы, $\vec{\xi}$ – смещение элементарного объёма плазмы от положения

*Результаты данного подраздела частично изложены в работе [3^a] и в докладах [15^a, 16^a].

равновесие, δp – возмущённое давление, \vec{b} – возмущённое магнитное поле, ω – частота возмущений, γ – показатель адиабаты.

В соответствии с результатами подраздела 2.1, считаем, что равновесное геомагнитное поле может быть аппроксимировано дипольным магнитным полем, которое запишем в виде

$$\vec{B} = [\nabla \psi \times \nabla \varphi]. \quad (2.36)$$

Здесь φ – торoidalный угол, а ψ – полоидальный магнитный поток

$$\psi = \frac{M \cos^2 \theta}{r}, \quad (2.37)$$

где M – магнитный дипольный момент Земли. Уравнения (2.36) и (2.37) записаны в сферической системе координат $\{r, \theta, \phi\}$. В уравнении (2.37) угол θ отсчитывается от плоскости магнитного экватора.

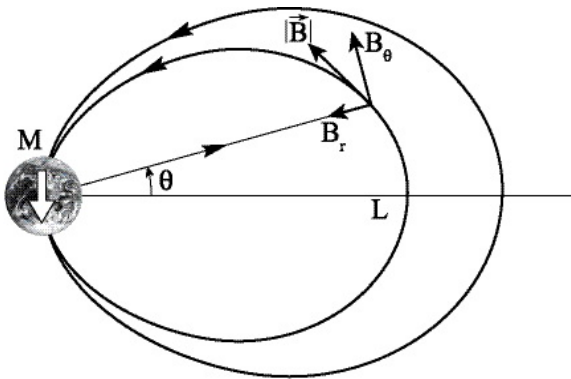


Рис. 2.3. Дипольное магнитное поле.

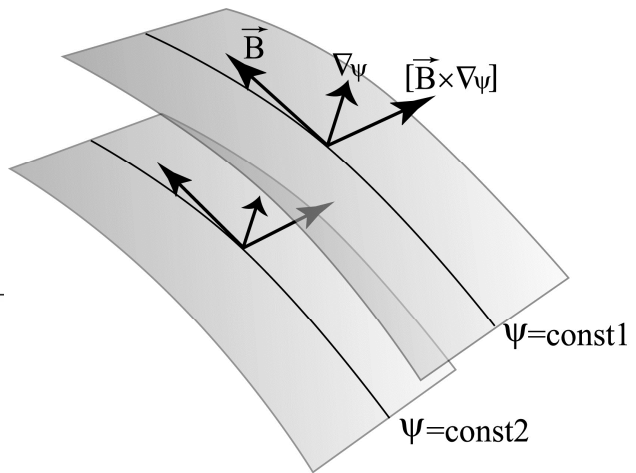


Рис. 2.4. Дипольные магнитные поверхности.

Из (2.36) следует, что направления $\nabla \psi$, $\nabla \varphi = [\vec{B} \times \nabla \psi] / |\nabla \psi|^2$ и \vec{B} являются ортогональными и могут быть использованы в качестве локальной системы координат. Разложим фигурирующие в (2.35) вектора $\vec{\xi}$ и \vec{b} по ортогональным векторам $\nabla \psi$, $\nabla \varphi$ и \vec{B} :

$$\vec{\xi} = \xi \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} + \eta \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} + \tau \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} = \xi \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} + \eta \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|^2} + \tau \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2}, \quad (2.38)$$

$$\vec{b} = Q_1 \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} + Q_2 \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} + Q_3 \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} = Q_1 \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} + Q_2 \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|^2} + Q_3 \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2}. \quad (2.39)$$

Для нахождения величин ξ , η , τ , Q_1 , Q_2 , Q_3 , умножим скалярно векторы $\vec{\xi}$ и \vec{b} на векторы $\nabla \psi$, $\nabla \phi$ и \vec{B} . В результате получаем

$$\xi = \vec{\xi} \cdot \nabla \psi.$$

Аналогично для амплитуды η имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \vec{\xi} \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi] &= \eta \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi]^2 / |\vec{B}|^2 = \eta \cdot (|\vec{B}|^2 |\nabla \psi|^2 - (\vec{B} \cdot \nabla \psi)^2) / |\vec{B}|^2 = \\ &= \eta \cdot |\vec{B}|^2 \cdot |\nabla \psi|^2 / |\vec{B}|^2 = \eta \cdot |\nabla \psi|^2, \end{aligned}$$

следовательно

$$\eta = \vec{\xi} \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi] / |\nabla \psi|^2.$$

Для величины τ получаем простое равенство

$$\tau = \vec{\xi} \cdot \vec{B}.$$

Для амплитуды Q_1 возмущенного магнитного поля из (2.39) получаем

$$Q_1 = \vec{b} \cdot \nabla \psi / |\nabla \psi|^2.$$

Выражение для величины Q_2 вытекает из цепочки векторных равенств

$$\vec{b} \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi] = Q_2 \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi]^2 / |\vec{B}|^2 = Q_2 |\vec{B}|^2 |\nabla \psi|^2 / |\vec{B}|^2 = Q_2 |\nabla \psi|^2,$$

т.е.

$$Q_2 = \vec{b} \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi] / |\nabla \psi|^2.$$

Величина Q_3 , удовлетворяет следующему очевидному равенству

$$Q_3 = \vec{b} \cdot \vec{B}.$$

Выразим величины Q_1 , Q_2 и Q_3 , которые потребуются ниже для расчётов, через амплитуды ξ , η , τ вектора смещения и равновесные параметры плазмы. Для Q_1 получаем

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \vec{b} \cdot \nabla \psi = \nabla \psi \cdot \text{rot} [\xi \times \vec{B}] = \text{div} \left(\left([\xi \times \vec{B}] \right) \times \nabla \psi \right) + [\xi \times \vec{B}] \cdot \text{rot} \nabla \psi = \\
&= -\text{div} \left[\nabla \psi \times [\xi \times \vec{B}] \right] = -\text{div} \left\{ \xi \cdot (\vec{B} \cdot \nabla \psi) - \vec{B} (\xi \cdot \nabla \psi) \right\} = \text{div} (\vec{B} \cdot \xi) = \\
&= \vec{B} \cdot \nabla \xi + \xi \text{div} \vec{B} = \vec{B} \cdot \nabla \xi.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$Q_1 = \vec{B} \cdot \nabla \xi.$$

Величина Q_2 приводится к виду

$$\begin{aligned}
Q_2 &= \vec{b} \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi] / |\nabla \psi|^2 = \left([\vec{B} \times \nabla \psi] / |\nabla \psi|^2 \right) \cdot \text{rot} [\xi \times \vec{B}] = \\
&= \left(\text{div} \left(\frac{[\xi \times \vec{B}] \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \right) + [\xi \times \vec{B}] \cdot \text{rot} \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \right).
\end{aligned}$$

Преобразуем первое слагаемое в полученном уравнении:

$$\begin{aligned}
\text{div} \left(\frac{[\xi \times \vec{B}] \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \right) &= \text{div} \left(\frac{1}{|\nabla \psi|^2} \left(\vec{B} \cdot ([\xi \times \vec{B}] \cdot \nabla \psi) - \nabla \psi \cdot (\vec{B} \cdot [\xi \times \vec{B}]) \right) \right) = \\
&= \text{div} \left(\frac{\vec{B}}{|\nabla \psi|^2} \left(\xi \frac{[\nabla \psi \times \vec{B}] \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} + \eta \frac{[[\vec{B} \times \nabla \psi] \times \vec{B}]}{|\vec{B}|^2} \cdot \nabla \psi + \tau \frac{[\vec{B} \times \vec{B}]}{|\vec{B}|^2} \cdot \nabla \psi \right) \right) = \\
\text{div} \left(\frac{\vec{B}}{|\nabla \psi|^2} \left(\eta \frac{\nabla \psi \cdot |\vec{B}|^2 - \vec{B} \cdot (\vec{B} \cdot \nabla \psi)}{|\vec{B}|^2} \cdot \nabla \psi \right) \right) &= \text{div} \left(\frac{\vec{B}}{|\nabla \psi|^2} \eta \frac{|\nabla \psi|^2 \cdot |\vec{B}|^2}{|\vec{B}|^2} \right) = \\
&= \text{div} (\vec{B} \cdot \eta) = \vec{B} \cdot \nabla \eta + \eta \cdot \text{div} \vec{B} = \vec{B} \cdot \nabla \eta.
\end{aligned}$$

Второе слагаемое после ряда векторных преобразований принимает вид:

$$\begin{aligned}
[\xi \times \vec{B}] \cdot \text{rot} \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} &= \xi \frac{[\nabla \psi \times \vec{B}]}{|\nabla \psi|^2} \cdot \text{rot} \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} + \eta \frac{[[\vec{B} \times \nabla \psi] \times \vec{B}]}{|\nabla \psi|^2} \cdot \\
&\cdot \text{rot} \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} + \tau \frac{[\vec{B} \times \vec{B}]}{|\nabla \psi|^2} \cdot \text{rot} \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} = -\xi \cdot S.
\end{aligned}$$

Здесь использовано обозначение

$$S = \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \cdot \text{rot} \left(\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right).$$

Величина S в произвольном магнитном поле описывает перекрещенность силовых линий магнитного поля – шир [90]. Для

рассматриваемой геометрии магнитного поля эта величина равна нулю. Для доказательства этого утверждения используем векторное равенство

$$\left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right] = \nabla \varphi,$$

следующее из (2.36). Тогда видно, что выражение для S , точно равно нулю

$$\nabla \varphi \cdot \text{rot}(\nabla \varphi) = 0.$$

Следовательно

$$Q_2 = \text{div} \left(\frac{[\vec{\xi} \times \vec{B}][\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \right) = B \cdot \nabla \eta.$$

Для величины Q_3 справедлива следующая цепочка векторных равенств:

$$\begin{aligned} Q_3 &= \vec{b} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \text{rot}[\vec{\xi}_\perp \times \vec{B}] = \text{div}[[\vec{\xi}_\perp \times \vec{B}] \times \vec{B}] + [\vec{\xi}_\perp \times \vec{B}] \cdot \text{rot} \vec{B} = \\ &= -\text{div}[\vec{B} \times [\vec{\xi}_\perp \times \vec{B}]] - \vec{\xi}_\perp \cdot [\text{rot} \vec{B} \times \vec{B}] = -\text{div}(\vec{\xi}_\perp |\vec{B}|^2 - \vec{B} \cdot (\vec{\xi}_\perp \cdot \vec{B})) - \vec{\xi}_\perp \cdot [\vec{j} \times \vec{B}] = \\ &= -|\vec{B}|^2 \cdot \text{div} \vec{\xi}_\perp - \vec{\xi}_\perp \cdot \nabla(p + |\vec{B}|^2). \end{aligned}$$

Окончательно, величины Q_1 , Q_2 и Q_3 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \vec{B} \cdot \nabla \xi, \quad Q_2 = \vec{B} \cdot \nabla \eta, \\ Q_3 &= -|\vec{B}|^2 \text{div} \vec{\xi}_\perp - \vec{\xi}_\perp \cdot \nabla(p + |\vec{B}|^2). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Из уравнения (2.40) вытекают следующие векторные равенства, которые можно получить прямыми вычислениями (см. Приложение №1):

$$[\vec{b} \times \vec{j}] = \frac{Q_1}{|\nabla \psi|^2} [\nabla \psi \times \vec{j}] - \frac{Q_3}{|\vec{B}|^2} p \nabla \psi, \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} [\vec{B} \times \text{rot} \vec{b}] &= -\nabla \psi \left(\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{Q_1}{|\nabla \psi|^2} \right) \right) - \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} (\vec{B} \cdot \nabla Q_2) + \nabla Q_3 - \\ &- Q_3 \frac{\nabla |\vec{B}|^2}{|\vec{B}|^4} - \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\vec{B} \cdot \nabla Q_3}{|\vec{B}|^2} \right) + 2 \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^4} (\vec{B} \cdot \nabla) \frac{|\vec{B}|^2}{2} Q_3 - \frac{Q_3 p \nabla \psi}{|\vec{B}|^2}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

С помощью (2.41) и (2.42) находим проекцию первого уравнения в (2.35) на направление $\nabla\psi$

$$\nabla\psi \cdot \nabla\delta p_1 = \omega^2\rho\xi + |\nabla\psi|^2 \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\vec{B} \cdot \nabla \xi}{|\nabla\psi|^2} \right) + 2\vec{\chi} \cdot \nabla\psi \left(\delta p_1 + p'\xi + \gamma p \operatorname{div} \vec{\xi} \right), \quad (2.43)$$

где $\vec{\chi}$ – вектор кривизны силовых линий магнитного поля [7]

$$\vec{\chi} = \left(\frac{\vec{B}}{B} \cdot \nabla \right) \frac{\vec{B}}{B} = \frac{\nabla(2p + |\vec{B}|^2)}{2|\vec{B}|^2} - \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^4} (\vec{B} \cdot \nabla) \frac{|\vec{B}|^2}{2},$$

а δp_1 – полное возмущение давления плазмы

$$\delta p_1 = \delta p + Q_3 = -\gamma p \operatorname{div} \vec{\xi} - |\vec{B}|^2 \left(\operatorname{div} \vec{\xi}_\perp + 2\vec{\chi} \cdot \vec{\xi}_\perp \right).$$

Проекции первого уравнения (2.35) на направления $\nabla\phi$ и \vec{B} имеют вид:

$$\left[\vec{B} \times \nabla\psi \right] \cdot \nabla\delta p_1 = \omega^2\rho |\nabla\psi|^2 \eta + |\vec{B}|^2 (\vec{B} \cdot \nabla) \left(\frac{|\nabla\psi|^2}{|\vec{B}|^2} \vec{B} \cdot \nabla \eta \right), \quad (2.44)$$

$$\vec{B} \cdot \nabla\delta p = \omega^2\rho\tau - \vec{b} \cdot \nabla p. \quad (2.45)$$

Подставляя в (2.45) выражение для δp и \vec{b} из (2.35), получаем

$$\omega^2\rho\tau + \gamma p \vec{B} \cdot \nabla \operatorname{div} \vec{\xi} = 0. \quad (2.46)$$

В полученных уравнениях (2.43), (2.44) и (2.46) фигурируют величины $\operatorname{div} \vec{\xi}$ и δp_1 , которые преобразуем следующим образом. Из (2.38) следует

$$\operatorname{div} \vec{\xi} = \frac{\nabla\psi \cdot \nabla \xi}{|\nabla\psi|^2} + \xi \operatorname{div} \left(\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2} \right) + \frac{[\vec{B} \times \nabla\psi]}{|\vec{B}|^2} \cdot \nabla \eta + \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\tau}{|\vec{B}|^2} \right). \quad (2.47)$$

Последнее слагаемое в этом уравнении с учётом (2.46) представим в виде

$$\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\tau}{|\vec{B}|^2} \right) = -\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\gamma p}{\omega^2\rho |\vec{B}|^2} \vec{B} \cdot \nabla \operatorname{div} \vec{\xi} \right). \quad (2.48)$$

Из (2.47) и (2.48) получаем уравнение

$$\frac{\nabla \psi \cdot \nabla \xi}{|\nabla \psi|^2} = -\xi \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right) - \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} \cdot \nabla \eta + \operatorname{div} \vec{\xi} + \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\gamma p}{\omega^2 \rho |\vec{B}|^2} \vec{B} \cdot \nabla \operatorname{div} \vec{\xi} \right). \quad (2.49)$$

Выражение для δp_1 перепишем с помощью выражения для $\vec{\chi}$ в виде

$$\delta p_1 = -\left(\gamma p + |\vec{B}|^2 \right) \operatorname{div} \vec{\xi} + |\vec{B}|^2 \left(\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\tau}{|\vec{B}|^2} \right) - \frac{2\vec{\chi} \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \xi \right).$$

Поставляя в это уравнение выражение (2.48), получаем

$$-\frac{2\vec{\chi} \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \xi - \frac{\delta p_1}{|\vec{B}|^2} = \left(1 + \frac{\gamma p}{|\vec{B}|^2} \right) \operatorname{div} \vec{\xi} + \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\gamma p}{\omega^2 \rho |\vec{B}|^2} \vec{B} \cdot \nabla \operatorname{div} \vec{\xi} \right). \quad (2.50)$$

Окончательно из (2.43), (2.44), (2.49) и (2.50) получаем искомую систему уравнений малых колебаний в дипольном магнитном поле:

$$\nabla \psi \cdot \nabla \delta p_1 = \omega^2 \rho \xi + |\nabla \psi|^2 \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\vec{B} \cdot \nabla \xi}{|\nabla \psi|^2} \right) + 2\vec{\chi} \cdot \nabla \psi (\delta p_1 + p' \xi + \gamma p \operatorname{div} \vec{\xi}), \quad (2.51a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \psi \cdot \nabla \xi}{|\nabla \psi|^2} = & -\xi \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right) - \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} \cdot \nabla \eta + \operatorname{div} \vec{\xi} + \\ & + \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\gamma p}{\omega^2 \rho |\vec{B}|^2} \vec{B} \cdot \nabla \operatorname{div} \vec{\xi} \right), \end{aligned} \quad (2.51b)$$

$$\frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} \cdot \nabla \delta p_1 = \omega^2 \rho \frac{|\nabla \psi|^2}{|\vec{B}|^2} \eta + (\vec{B} \cdot \nabla) \left(\frac{|\nabla \psi|^2}{|\vec{B}|^2} \vec{B} \cdot \nabla \eta \right), \quad (2.51b)$$

$$\left(1 + \frac{\gamma p}{|\vec{B}|^2} \right) \operatorname{div} \vec{\xi} + \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\gamma p}{\omega^2 \rho |\vec{B}|^2} \vec{B} \cdot \nabla \operatorname{div} \vec{\xi} \right) = -\frac{2\vec{\chi} \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \xi - \frac{\delta p_1}{|\vec{B}|^2}. \quad (2.51r)$$

Система (2.51) содержит в качестве неизвестных величин следующие четыре величины: ξ , η , $\operatorname{div} \vec{\xi}$ и δp_1 . Эта система будет использоваться в Разделе 2 для рассмотрения ультранизкочастотных МГД мод в магнитосфере Земли. Основное внимание будет уделено поляризации УНЧ-возмущений. Далее

также будет предполагаться, что ионосфера является идеально проводящей средой и эффектами конечной проводимости [89, 117] мы будем пренебрегать. Более подробно процедура получения уравнений (2.51) изложена в Приложении №2.

2.3. Бессилловые плазменные конфигурации

Хорошо известно, что естественным признаком магнитных облаков является малое значение газодинамического давления $\beta = 8\pi P/B^2 \ll 1$ [11]. Также известно, что внутри магнитного облака динамическое давление потока ρv^2 остаётся приблизительно постоянным [21]. Поскольку вдали от Солнца скорость солнечного ветра является почти постоянной величиной [162], то поэтому в системе координат, движущейся со скоростью солнечного ветра, структура магнитного облака определяется в основном магнитным полем. Такие конфигурации называются бессилловыми.

В физике космической плазмы обычно различают два типа магнитостатического равновесия:

1. магнитные силы уравниваются силами немагнитного происхождения (тяготение, газокINETическое давление и т.д.) [4, 17, 23];
2. магнитная сила и результирующая немагнитных сил равны нулю. В этом случае магнитное поле является «бессилловым» [5, 17, 35, 37, 115].

Первый случай реализуется в некоторых космических объектах, например, (см. [4, 188]) в солнечных пятнах, протуберанцах и спиральных ветвях галактик.

Второй тип равновесия играет важную роль в физике ближнего космоса. Бессилловое равновесие возникает тогда, когда плотности энергии, обусловленные силой тяготения и газокINETическим давлением, гораздо меньше, чем плотность энергии магнитного поля. Поэтому в этом случае энергия плазменной системы в основном определяется энергией магнитного

поля. Кроме того, в достаточно разреженной космической плазме (см. [5, 11, 33]) электрический ток стремится течь параллельно магнитному полю, так что магнитные силы исчезают. Равенство нулю магнитной силы означает, что

$$\text{rot}\vec{B} \times \vec{B} = 0. \quad (2.52)$$

Условие (2.52) выполняется, если справедливо равенство

$$\text{rot}\vec{B} = \alpha\vec{B}, \quad (2.53)$$

где α – некоторая произвольная скалярная функция, которая удовлетворяет единственному условию

$$\vec{B} \cdot \nabla \alpha = 0. \quad (2.54)$$

Это уравнение получается, если к уравнению (2.53) применить операцию div . Обычно полагается, что $\alpha = \text{const}$. При этом уравнение (2.54) удовлетворяется самосогласованно.

Об общих решениях нелинейного уравнения (2.52) известно очень мало, несмотря на его довольно простой вид. В космической плазме простые решения этого уравнения получены для протуберанцев, солнечных пятен и корональных петель. Если α постоянно, то применение операции rot к уравнению (2.53) даёт уравнение

$$(\Delta + \alpha^2)\vec{B} = 0, \quad (2.55)$$

которое описывает пространственное распределение бессилового магнитного поля. Для уравнения (2.53) известно много решений. Общее вращательно-симметричное решение уравнения (2.53) с постоянной α было получено Люстом и Шлютером [5]. Как показал Чандрасекар [5], его можно выразить при помощи функций Гегенбауэра. Показано также, что для любого данного тороидального магнитного поля можно найти такое полоидальное поле, что их суперпозиция будет бессиловой; и наоборот, если дано полоидальное поле, то всегда найдется тороидальное поле, которое приведет к бессиловой суперпозиции. Общее решение без ограничений постоянной α было получено Шлютером [5] для случая цилиндрической симметрии (при условии $\partial/\partial z \equiv 0$).

Бессиловые магнитные поля являются не просто частным случаем полей, удобных для исследования. Они обладают свойствами, которые делают их существование в природе весьма вероятным. Прежде всего, бессиловым должно быть относительно сильное стационарное поле в области с малым давлением газа, например над солнечными пятнами. Главное же значение бессиловых полей вытекает из их энергетических свойств. Бессиловое поле с $\alpha = \text{const}$ представляет собой состояние плазмы с минимальной магнитной энергией, которая в основном определяет энергию системы [188]. Поскольку энергия магнитного поля минимальна, то система будет очень устойчивой, поскольку ей неоткуда взять энергию на развитие возмущений.

Полагая, что магнитное облако (или КВМ) движется со скоростью солнечного ветра, его структуру можно считать бессиловой плазменной конфигурацией, крайне устойчивой к возмущениям, и поэтому долгоживущей. Такие конфигурации будут исследованы в разделе 4. В отличие от других работ, где рассматриваются бессиловые магнитостатические конфигурации плазмы, будут рассмотрены математические модели бессиловых конфигураций в потоке плазмы, а также с учётом движения плазмы внутри самой конфигурации. Рассмотренная в данном разделе задача представляет интерес для идентификации магнитных плазменных образований в солнечном ветре. Эта задача в последнее время интенсивно обсуждается в публикациях по космическим исследованиям [36, 64].

2.4. Модель магнитосферы как чёрного ящика*

Приведём качественные соображения, поясняющие функциональную зависимость Dst-индекса от произведения скорости v солнечного ветра на южную составляющую B_z -компоненты межпланетного магнитного поля.

* Материалы данного подраздела частично изложены в работе [2 a] и в докладах [14 a , 18 a].

$$\text{Dst} = f(vB_z). \quad (2.56)$$

Исходим из того, что на частицы магнитосферной плазмы действует наведённое потоком солнечного ветра электрическое поле \vec{E} . В условиях слабых возмущений электрическое поле конвекции \vec{E} является доминирующим фактором массопереноса в магнитосфере и определяет кинетическую энергию частиц $W = W(E)$. Заряженная частица с кинетической энергией $W = W_{\perp} + W_{\parallel}$ и зарядом q в неоднородном магнитном поле дрейфует со скоростью [5, 112]

$$\vec{V}_D = \frac{2W - W_{\perp}}{qB^3} [\vec{B} \times \nabla B]. \quad (2.57)$$

Суммарный дрейф частиц создаёт кольцевой ток \vec{I} вблизи Земли. Таким образом, электрическое поле \vec{E} определяет силу кольцевого тока. Поскольку электрическое поле, которое эффективно проникает в магнитосферу, определяется южной составляющей магнитного поля

$$|\vec{E}| = \frac{1}{c} v B_z, \quad (2.58)$$

а сам кольцевой ток \vec{I} , как отмечалось выше, определяет депрессию (уменьшение) магнитного поля Земли, т.е. Dst-индекс [19, 21], поскольку создаёт магнитное поле, направленное противоположно магнитному полю Земли. Из изложенного следует, что должна существовать нелинейная зависимость между Dst-индексом и указанным электрическим полем (2.58). Таким образом, главным фактором, который приводит к геомагнитной буре, есть наличие в потоке СВ, набегающего на магнитосферу, южной B_z компоненты магнитного поля. Стойкое $B_z (< -10 \text{ нТл})$, которое удерживается в магнитном облаке КВМ, обуславливает наиболее мощные бури ($\text{Dst} < -100 \text{ нТл}$).

Используя выявленную функциональную зависимость, мы будем прогнозировать динамику Dst-индекса по наблюдательным данным о скорости солнечного ветра и южной составляющей магнитного поля. Этот

подход был применён в ряде работ по идентификации дискретной модели прогнозирования Dst-индекса [41, 48, 77, 175, 202], а также для объяснения ряда физических процессов, влияющих на его динамику. Наиболее простой способ идентификации модели заключается в построении нелинейной передаточной функции.

Метод «чёрного ящика» хорошо известен в информатике, электротехнике и радиофизике [142, 143]. Он основывается на том, что в ряде случаев можно пренебречь внутренним строением приборов и систем, поскольку для них достаточно знать взаимосвязь между входом и выходом, чтобы описать их поведение в целом. В этом случае внутренняя структура отдельных частей системы не важна. Изменение внутренних параметров системы задаётся некоторым внешним фактором $u(t)$ (обычно это многомерный временной ряд), который называется входом динамической системы. Внутреннее состояние «чёрного ящика» в момент времени t (если бы мы его знали) характеризуется некоторым временным вектором $\psi(t)$. Поскольку в действительности этот вектор неизвестен, то вместо него можем использовать некоторые экспериментальные измерения $y(t)$ выхода системы, предполагая, что эти измерения являются функцией вектора $\psi(t)$. Далее будем называть $y(t)$ выходом нелинейного «чёрного ящика». Тогда проблема идентификации системы состоит в поиске аналитического описания динамической модели $\psi(t)$ на основе имеющихся входных и выходных данных.

Если исследуемая система является линейной, то её выход $y(t)$ можно представить в виде свёртки $u(t)$ с импульсной частотной характеристикой $h(\tau)$:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau. \quad (2.59)$$

Если перейти от временной переменной t к частотной f то фурье-преобразование функции $h(\tau)$ называется линейной амплитудно-частотной характеристикой $H_{lin}(f)$, поскольку в этом случае она связывает спектральные компоненты входа и выхода «чёрного ящика» уравнением

$$y(f) = H_{lin}(f)u_f. \quad (2.60)$$

Модуль комплексной величины $H_{lin}(f)$ характеризует степень усиления (или ослабления) входной спектральной составляющей системы, а фаза указывает на запаздывание между входом и выходом на частоте f . Функции $h(\tau)$ и $H_{lin}(f)$ являются равноценными при описании «чёрного ящика». Таким образом, выходной сигнал линейных систем полностью определяется входящим сигналом и импульсной частотной характеристикой.

Интегральное уравнение (2.59) легко обобщить на нелинейные системы с помощью рядов Вольтера [70]. В этом случае выходной сигнал описывается интегральным уравнением

$$y(t) = \int_0^{\infty} h_1(\tau)u(t-\tau)d\tau + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\tau, \tau_2)u(t-\tau)u(t-\tau_2) \dots + \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} h_i(\tau_1 \dots \tau_i)u(t-\tau_1)u(t-\tau_2) \dots u(t-\tau_i)d\tau_1 \dots d\tau_i + \dots, \quad (2.61)$$

в котором функция $h_i(\tau_1 \dots \tau_i)$ является i -м ядром Вальтерра. Если известны все ядра, то можно определить выходной сигнал системы, а также изучить её свойства. Таким образом, интегральное представление (2.61) полностью оправдывает поведение системы.

Для дискретных наблюдательных данных интегралы в (2.61) заменяются на суммы

$$y_k = \sum_{n_1} h_1(n_1)u_{k-n_1} + \sum_{n_1, n_2} h_2(n_1, n_2)u_{k-n_1}u_{k-n_2} + \sum_{n_1, n_2, \dots, n_i} h_i(n_1, n_2, \dots, n_i)u_{k-n_1}u_{k-n_2} \dots + \sum_{n_1, n_2, \dots, n_i} h_i(n_1, n_2, \dots, n_i)u_{k-n_1}u_{k-n_2}u_{k-n_i} + \dots, \quad (2.62)$$

где k – дискретный момент времени.

Фурье-преобразование уравнения (2.62) приводит к следующему уравнению для выходного сигнала

$$y_f = H_1(f)U(f) + \sum_{f_1 f_2: f_1+f_2=f} H_2(f_1, f_2)u_1 u_2 + \dots \quad (2.63)$$

Здесь $H_1(f_1, \dots, f_l)$ – обобщённая частотная передаточная функция, учитывающая линейные свойства системы. Для слаботурбулентной космической плазмы это представление может быть ограничено трёхволновым взаимодействием, поэтому нелинейными процессами с участием четырёх и больше волн можно пренебречь [42]. Очевидно, что функция $H_1(f_1)$ имеет то же физическое содержание, что и $H_{lin}(f_1)$. Функция $H_2(f_1, f_2)$ зависит от двух частот и указывает на нелинейное квадратичное взаимодействие между спектральными компонентами f_1, f_2 исходных сигналов (f_i может принимать отрицательные значения) и передачу энергии в суммарной частот $f_1 + f_2 = f$ на выходе системы. Отметим, что уравнение (2.63) допускает строгое обоснование в рамках теории турбулентной плазмы [42, 45]. Соответствие между математической формулировкой теории турбулентной плазмы и рядами Вольтера является важным обстоятельством с точки зрения анализа и интерпретации экспериментальных измерений.

Для нахождения неизвестных параметров линейной модели «чёрного ящика» по экспериментальным данным обычно используется метод наименьших квадратов. Однако он применим только для идентификации полиномиальной дискретной модели, потому что количество слагаемых в модели резко увеличивается с увеличением сложности полинома и числа временных рядов. Поэтому вместо этого метода будем применять процедуру структурно-параметрической идентификации модели [107], суть которой сводится к добавлению таких нелинейных слагаемых в модель, которые существенно улучшают прогноз. Процесс выбора нелинейных слагаемых обычно считается завершённым, когда ошибка прогноза удовлетворяет

определённому тесту на геоэффективную точность модели, который подтверждает невозможность последующего уменьшения ошибки по новым наблюдательным данным.

Для прогнозирования поведения Dst-индекса мы рассматриваем магнитосферу, как систему с одним входом и одним выходом. Описание нелинейных процессов может также быть улучшено за счет введения в модель свободных параметров и шума, но на этом этапе этот вопрос не анализировался. Как показали численные расчёты, выбор в качестве входа модели параметра νB_z позволяет разработать достаточно адекватную для прогноза модель [4].

В соответствии с [82, 143], любая аналитическая причинная система может быть представлена в виде ряда Вольтера (2.62), который может быть аппроксимирован, в частности, билинейной системой. Поэтому нелинейные системы могут быть аппроксимированы с той или иной степенью точности дискретными билинейными системами, которые являются наиболее простым классом нелинейных систем. В разделе 5 мы будем использовать билинейную динамическую модель временного поведения Dst-индекса следующего вида [2^a]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \sum_{i=1}^m B_i x(t) u_i(t), \\ y(t) &= Dx(t), \end{aligned} \quad (2.64)$$

где A, B_i – постоянные матрицы размера $n \times n$, $n \times n$ соответственно; $x(t)$ – вектор состояния; $u(t)$ – вектор с компонентами $u_i(t)$, характеризующий параметры солнечного ветра; $y(t)$ – скалярная функция времени, характеризующая Dst-индекс; D – постоянная матрица размера $n \times 1$. Размерность вектора $x(t)$ определяется с помощью известного алгоритма Таксенса. Вопрос приведения нелинейной динамической системы к билинейному виду частично рассмотрен в Приложении №3.

Для выбора конкретной структуры билинейной модели была использована процедура структурно-параметрической идентификации [108, 128], суть которой сводится к добавлению таких билинейных слагаемых в модели, которые существенно улучшают прогноз, не нарушая устойчивости. Процесс выбора нелинейных слагаемых обычно считается завершенным, когда ошибка прогноза удовлетворяет определенному тесту на точность модели и подтверждает невозможность дальнейшего её уменьшения по новым данным наблюдения.

2.5. Выводы к разделу

1. Рассмотрено магнитогидродинамическое равновесие магнитосферной плазмы в предположении, что отсутствует конвекция, геомагнитное поле является осесимметричным, а вокруг Земли течет только тороидальный ток. При сделанных предположениях получено нелинейное уравнение типа Грэда-Шафранова (2.9), описывающее магнитостатическое равновесие плазмы в геомагнитном поле, которое несущественно отличается от дипольного магнитного поля. С помощью этого уравнения получено аналитическое решение для распределения плазмы в приэкваториальной области (Рис. 2.2), которое хорошо согласуется с экспериментальными данными. Этот результат позволил сделать вывод о том, что приближение магнитостатического равновесия плазмы может быть использовано для изучения возмущений геомагнитного поля. Предложена упрощенная модель магнитостатического равновесия плазмы с малым давлением, в рамках которой геомагнитное поле можно считать дипольным.

2. Впервые получена система уравнений малых колебаний (2.51) для ультранизкочастотных возмущений плазмы, помещенной в дипольное магнитное поле. При получении этой системы использовались тождественные векторные преобразования, поэтому эти уравнения являются

точными. Полученные уравнения описывают как продольную, так и поперечную структуру возмущений.

3. Из соображения повышенной устойчивости КВМ сделан вывод о том, что последние представляет собой бессиловые плазменные структуры. Отмечено, что бессиловые конфигурации представляют собой состояние плазмы с минимальной магнитной энергией, что делает их очень устойчивыми относительно внутренних и внешних возмущений. Описаны основные физические свойства бессиловых плазменных конфигураций. Приведены уравнения (2.52) и (2.53) для бессилового магнитного поля, которые будут использованы в разделе 4.

4. Представлены результаты по структурно-параметрической идентификации нелинейных дискретных динамических моделей прогнозирования магнитных бурь. Приведены качественные соображения, поясняющие зависимость Dst-индекса от произведения скорости солнечного ветра и южной компоненты магнитного поля. Отмечено, что рассмотрение магнитосферы как «черного ящика» и использование методов физической кибернетики позволяет прогнозировать поведение Dst-индекса во времени по данным наблюдений с космических аппаратов и предсказывать магнитные бури. Основное внимание уделено билинейным моделям для прогнозирования поведения Dst-индекса.

РАЗДЕЛ 3. ГЕНЕРАЦИЯ УНЧ ВОЗМУЩЕНИЙ В МАГНИТОСФЕРЕ ЗЕМЛИ*

Ниже, следуя результатам Раздела 2, мы исследуем проблему генерации ультранизкочастотных возмущений МГД возмущений, используя в качестве модели геомагнитного поля дипольное магнитное поле. Кроме того, как и в упомянутом разделе, мы ограничимся рассмотрением только равновесных конфигураций магнитосферной плазмы, учитывающих тороидальный ток. Это позволит найти аналитически достаточно простые и математически точные решения. Отметим, что рассмотренные в данном разделе возмущения поперечно-мелкомасштабного типа в последнее время экспериментально наблюдается с помощью космических аппаратов [53, 89, 130].

3.1. Собственные УНЧ моды в дипольном магнитном поле

Полученная в Подразделе 2.2 система уравнений (2.51) для УНЧ мод описывает их "продольную" и "поперечную" структуры и позволяет описать возможные типы смещений (или поляризаций) элементарного объема плазмы. Положим в этих уравнениях $\delta p_1 = 0$, $\xi = 0$. Как отмечалось ранее, равенство $\delta p_1 = 0$ физически соответствует случаю, когда в магнитосферной плазме отсутствует быстрая магнитозвуковая волна. Тогда, из уравнений (2.51) получаем:

$$\operatorname{div} \vec{\xi} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} \cdot \nabla \eta = \frac{\nabla \varphi \cdot \nabla \eta}{|\nabla \varphi|^2} = 0, \quad (3.2)$$

* Результаты данного раздела изложены в работах [3^a, 6^a, 7^a, 9^a, 11^a] и в докладах [15^a, 16^a, 20^a].

$$\omega^2 \rho \frac{|\nabla \psi|^2}{|\vec{B}|^2} \eta + (\vec{B} \cdot \nabla) \left(\frac{|\nabla \psi|^2}{|\vec{B}|^2} \vec{B} \cdot \nabla \eta \right) = 0. \quad (3.3)$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что $\tau=0$. Таким образом, первый тип УНЧ возмущений (2.18) имеет поляризацию вида $\xi=0$, $\tau=0$, $\eta \neq 0$. Амплитуда η удовлетворяет уравнениям (3.2) и (3.3) и описывает тороидальные альфвеновские волны. Из (3.2) следует, что амплитуда η не зависит от угла φ .

Рассмотрим возможность существования волн с другой поляризацией. Положим $\delta p_1 = 0$, $\eta = 0$. В этом случае из (1.18) получаются уравнения

$$\frac{\omega^2 \rho \xi}{|\nabla \psi|^2} + \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\vec{B} \cdot \nabla \xi}{|\nabla \psi|^2} \right) + \frac{2\vec{\chi} \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} (p' \xi + \gamma p \operatorname{div} \vec{\xi}) = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\nabla \psi \cdot \nabla \xi}{|\nabla \psi|^2} + \xi \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right) = \operatorname{div} \vec{\xi} + \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\gamma p}{\omega^2 \rho |\vec{B}|^2} \vec{B} \cdot \nabla \operatorname{div} \vec{\xi} \right), \quad (3.5)$$

$$\left(1 + \frac{\gamma p}{|\vec{B}|^2} \right) \operatorname{div} \vec{\xi} + \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\gamma p}{\omega^2 \rho |\vec{B}|^2} \vec{B} \cdot \nabla \operatorname{div} \vec{\xi} \right) + \frac{2\vec{\chi} \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \xi = 0. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.5) с помощью (3.6) перепишем в виде

$$\operatorname{div} \left(\xi \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right) + \beta \operatorname{div} \vec{\xi} + \frac{2\vec{\chi} \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \xi = 0, \quad \beta = \gamma p / |\vec{B}|^2. \quad (3.7)$$

Уравнения (3.4), (3.6) и (3.7) составляет точную систему уравнений в переменных ξ и $\operatorname{div} \vec{\xi}$ и описывают УНЧ возмущения с полоидальной поляризацией.

Эти уравнения можно также записать в переменных ξ и τ . Подставляя выражение для $\operatorname{div} \vec{\xi}$, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\operatorname{div} \bar{\xi} = \operatorname{div} \left(\xi \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right) + \bar{B} \cdot \nabla \left(\frac{\tau}{|\bar{B}|^2} \right), \quad (3.8)$$

в уравнение (3.5), получаем уже известное нам (см. Подраздел 2.2) уравнение

$$\omega^2 \rho \tau + \gamma p \bar{B} \cdot \nabla \operatorname{div} \bar{\xi} = 0. \quad (3.9)$$

Из (3.7) и (3.8) вытекает равенство

$$\operatorname{div} \bar{\xi} = \frac{1}{1 + \gamma p / |\bar{B}|^2} \left[\bar{B} \cdot \nabla \left(\frac{\tau}{|\bar{B}|^2} \right) - \frac{2 \bar{\chi} \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \xi \right].$$

С учётом этого результата получаем систему уравнений для возмущений с поляризацией $\xi \neq 0$, $\tau \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 \rho \xi}{|\nabla \psi|^2} + \bar{B} \cdot \nabla \left(\frac{\bar{B} \cdot \nabla \xi}{|\nabla \psi|^2} \right) + \frac{2 \bar{\chi} \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \left(p' \xi + \frac{\gamma p}{1 + \beta} \left(\bar{B} \cdot \nabla \left(\frac{\tau}{|\bar{B}|^2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2 \bar{\chi} \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \xi \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\frac{\rho \omega^2 \tau}{|\bar{B}|^2} + \beta \bar{B} \cdot \nabla \left[\frac{1}{1 + \beta} \left(\bar{B} \cdot \nabla \left(\frac{\tau}{|\bar{B}|^2} \right) - \frac{2 \bar{\chi} \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \xi \right) \right] = 0, \quad (3.11)$$

$$\operatorname{div} \left(\xi \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right) + \frac{2 \bar{\chi} \cdot \nabla \psi}{1 + \beta |\nabla \psi|^2} \xi + \frac{\beta}{1 + \beta} \bar{B} \cdot \nabla \left(\frac{\tau}{|\bar{B}|^2} \right) = 0. \quad (3.12)$$

Уравнения (3.10) и (3.11) описывают продольную структуру полоидальных альфвеновских и медленных магнитозвуковых мод, поскольку в них содержатся производные вдоль магнитного поля, связанных между собой через радиальную кривизну силовых линий. Уравнение (3.12) описывают поперечную структуру этих мод, поскольку содержит производные, перпендикулярные к магнитному полю. Возможность существования УНЧ мод с другими «смешанными» поляризациями рассмотрена в подразделе 3.3 для поперечно-мелкомасштабных УНЧ возмущений.

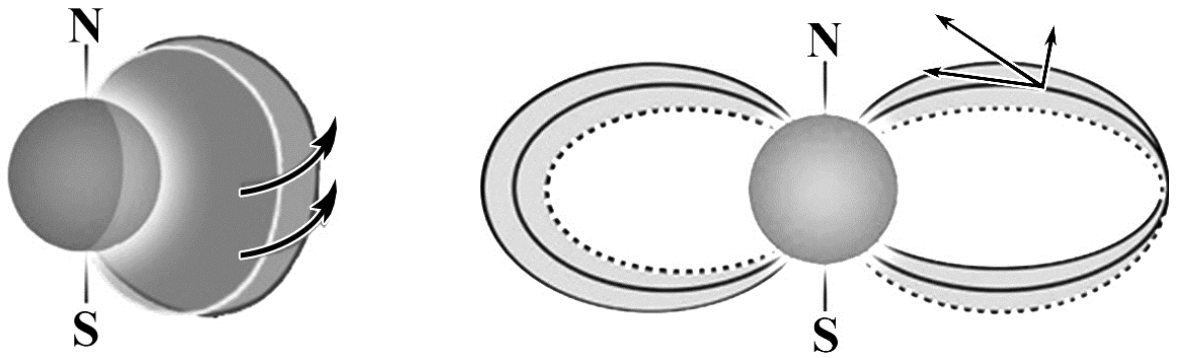


Рис. 3.1. Тороидальные (слева) и полоидальные (справа) альфвеновские моды.

3.2. Затухание тороидальных альфвеновские мод из-за перемешивания фаз возмущений

Хорошо известно, что МГД-волны, распространяющиеся в плазме, затухают вследствие диссипации. При этом плазма нагревается. Этот эффект используется при проведении экспериментов по высокотемпературной плазме. В ряде случаев, однако, имеет место сильное затухание, обусловленное непрерывным спектром МГД-волн [168]. Это затухание имеет ту же физическую природу, что и затухание Ландау [29], при котором волна поглощается из-за того, что плазменные частицы с различными скоростями генерируют волны с разными частотами. В случае непрерывного спектра волны в разных пространственных координатах имеют различную частоту, что и приводит к затуханию. Рассмотрим подробнее этот эффект для тороидальных альфвеновских мод в магнитосферной плазме.

В полученном в предыдущем подразделе в уравнении (3.3) для тороидальных альфвеновские мод присутствует оператор $(\vec{B} \cdot \nabla)$. Поэтому для дальнейшего анализа этого уравнения удобно перейти к производной вдоль силовой линии магнитного поля, т.е. представить оператор $(\vec{B} \cdot \nabla)$ в виде

$$(\vec{B} \cdot \nabla) = B \frac{\partial}{\partial l}, \quad (3.13)$$

где $\partial/\partial l$ – производная вдоль силовой линии магнитного поля. Для нахождения $\partial/\partial l$ на силовой линии магнитного поля учтём, что в выражение для магнитного поля

$$B = \frac{M}{r^3} (1 + 3\sin^2 \theta)^{1/2} \quad (3.14)$$

необходимо подставить значение r на силовой линии

$$r(\theta) = L \cos^2 \theta, \quad (3.15)$$

где L – параметр Мак – Илвайна [150], радиальное расстояние к силовой линии в экваториальной плоскости, измеренное в радиусах Земли, а также учесть, что элемент дуги магнитной силовой линии имеет вид [12]

$$dl = L \cos \theta (1 + 3\sin^2 \theta)^{1/2} d\theta. \quad (3.16)$$

Окончательно получаем

$$\bar{B} \cdot \nabla = \frac{M}{L^4 \cos^7 \theta} B \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (3.17)$$

В дальнейших расчетах также учтём, что на силовой линии магнитного поля величина $|\nabla \psi|$ имеет вид

$$|\nabla \psi| = \frac{M}{r^2} \cos \theta (1 + 3\sin^2 \theta)^{1/2} = \frac{M (1 + 3\sin^2 \theta)}{L^2 \cos^3 \theta}. \quad (3.18)$$

Перейдём в уравнении (3.3) к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow \frac{\omega}{\omega_A} = \Omega, \quad \bar{B} \rightarrow \frac{\bar{B}}{B_0}, \quad \psi \rightarrow \frac{\psi}{\psi_0}, \quad P \rightarrow \frac{P}{B_0^2}, \\ B_0 = \frac{M}{L^3}, \quad \omega_A = \frac{B_0}{L\sqrt{\rho}}, \quad \psi_0 = \frac{M}{L}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Используя полученные результаты, перепишем (3.3) в виде

$$\Omega^2 \hat{\eta} + \frac{1}{\cos^{13} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (3.20)$$

Фигурирующая в этом уравнении альфвеновская частота ω_A является постоянной величиной вдоль силовой линии магнитного поля, поскольку в рассматриваемой модели магнитосферной плазмы с изотропным давлением

плотность плазмы будет постоянной вдоль силовых линий магнитного поля. Действительно, из уравнения (1.2), справедливого для магнитоэстатического равновесия, следует,

$$(\bar{B} \cdot \nabla P) = B \frac{\partial P}{\partial l} = 0, \quad (3.21)$$

т.е. давление является постоянной величиной вдоль силовой линии магнитного поля. Тогда из термодинамического соотношения $P/\rho^\gamma = \text{const}$ для идеальной плазмы следует сделанное утверждение.

Для изучения спектра собственных тороидальных альфвеновских мод уравнение (3.20) следует дополнить граничными условиями. Обычно в качестве граничных условий выбирают так называемые «жёсткие» граничные условия [34, 86, 118]. В этом случае предполагается, что силовые линии магнитного поля «опираются» на ионосферу с большой проводимостью и «вморожены» в неё [88]. Тогда возмущённые величины обращаются в ноль на идеально проводящей невозмущённой поверхности ионосферы на каждой магнитной силовой линии, т.е. имеют место граничные условия вида

$$\hat{\eta}(\theta = \pm\theta_0) = 0, \quad (3.22)$$

где θ_0 – угол пересечения силовой линии магнитного поля с ионосферами сопряжённых полушарий. Здесь учтено, что амплитуда $\hat{\eta}$ исчезает в магнито-сопряжённых точках $\pm\theta_0$. Фигурирующий в (3.22) угол θ_0 удовлетворяет уравнению

$$\theta_0 = \arccos \frac{1}{\sqrt{L}}. \quad (3.23)$$

При написании равенства (3.23) учтено, что высота нижней границы ионосферы бесконечно мала по сравнению с радиусом Земли.

Для основных мод ($n \approx 1$) уравнение (3.20) можно решить только численно, а для мод с $n > 1$ решение можно найти с помощью ВКБ

приближения. Введением новой переменной $x = \sin \theta$ уравнение (3.20) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial x^2} + k^2(x) \hat{\eta} = 0, \quad (3.24)$$

где

$$k^2(x) = \Omega^2 (1 - x^2)^6. \quad (3.25)$$

Решение получившегося уравнения в соответствии с методом ВКБ ищем в виде

$$\eta = g(x) \exp \left[\pm i \int_a^x k(x') dx' \right], \quad (3.26)$$

где $g(x)$ – медленно меняющаяся функция x . Тогда

$$\eta' = \frac{g'}{g} \eta \pm ik\eta, \quad (\dots)' = \frac{\partial}{\partial x} (\dots), \quad \eta'' = \frac{g''}{g} \eta - k^2 \eta \pm ik' \eta + 2ik \frac{g'}{g} \eta. \quad (3.27)$$

Подставляя выражение (3.27) в уравнение (3.24), получаем приближённое решение в виде

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\Omega \cos^3 \theta}} \sin \left[\Omega \int_a^\theta \cos^3 \theta d\theta + \varphi \right]. \quad (3.28)$$

Используя граничное условие $\eta(\theta = -\theta_0) = 0$, из (3.28) получаем

$$\varphi = \Omega \int_{-\theta_0}^a \cos^7 \theta d\theta.$$

Следовательно

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\Omega \cos^3 \theta}} \sin \left[\Omega \int_{-\theta_0}^\theta \cos^7 \theta d\theta \right]. \quad (3.29)$$

Из (3.29) с помощью второго граничного условия $\eta(\theta = +\theta_0) = 0$ находим

$$\Omega_m = \pi m / \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \cos^7 \theta d\theta, \quad (3.30)$$

и

$$\eta_m = \frac{1}{\sqrt{\Omega_m \cos^3 \theta}} \sin \left[\Omega_m \int_a^\theta \cos^7 \theta d\theta \right]. \quad (3.31)$$

Это решение достаточно хорошо согласуется с численными расчетами даже для $n=1$ [90]. Легко видеть, что Ω_m и таким образом и ω являются непрерывными функциями θ_0 (или L). Такую зависимость называют обычно непрерывным спектром. В таком спектре волны, движущиеся на магнитных поверхностях с разными L , имеют различные частоты. Это приводит к тому, что волны с близкими значениями L имеют разные фазы $\omega(L)t + \varphi$. Покажем, что такая зависимость фаз от L приведёт к затуханию волн. Будем следовать подходу работы [37]. Рассмотрим две соседние магнитные поверхности, различающиеся экваториальными расстояниями $L - \Delta L$ и $L + \Delta L$. Полагая $L \gg \Delta L$, рассчитаем среднее возмущённое тороидальное магнитное поле между этими поверхностями

$$\langle \delta B_\varphi(L, \theta, t) \rangle_L = \frac{1}{2\Delta L} \int_{L-\Delta L}^{L+\Delta L} \delta B_\varphi(L, \theta, t) dL = \frac{1}{2\Delta L} \int_{L-\Delta L}^{L+\Delta L} a(L, \theta) e^{-i\omega(L)t} dL.$$

Здесь зависимость $\omega(L)$ определяется уравнением (3.30). Величина $a(L, \theta)$ определяется из начального условия при $t = 0$. Переходя в интеграле от переменной L к переменной ω , получаем

$$\langle \delta B_\varphi(L, \theta, t) \rangle_L = \frac{1}{2\Delta L} \int_{\omega_-}^{\omega_+} b(\omega, \theta) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (3.32)$$

где введена следующая функция

$$b(\omega, \theta) = \frac{a(L(\omega), \theta)}{\partial \omega / \partial L}.$$

Здесь $L(\omega)$ – функция, обратная к $\omega(L)$, $\omega_\pm = \omega(L \pm \Delta L)$. Заметим, что функция $b(\omega, \theta)$ существует только тогда, когда $\partial \Omega / \partial L \neq 0$, т.е. когда частота Ω является непрерывной функцией L .

Интегрируя правую часть уравнения (3.32) по частям, получаем

$$\langle \delta B_\varphi(L, \theta, t) \rangle_L = \frac{i}{2\Delta L} \left[\frac{b(\omega) e^{-i\omega t}}{t} \Big|_{\omega_+}^{\omega_-} - \frac{1}{t} \int_{\omega_+}^{\omega_-} \frac{\partial b(\omega, \theta)}{\partial \omega} e^{-i\omega t} d\omega \right]. \quad (3.33)$$

Легко видеть, что $\langle \delta B_\varphi \rangle$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, т.е. тороидальные волновые возмущения затухают. Это затухание обусловлено фазовым перемешиванием [29, 37] из-за зависимости частоты колебаний от поперечной к магнитным поверхностям координаты. Численные расчеты указывают на то, что такая же зависимость имеет место и в случае полоидальных альфвеновских волн, «зацепленных» с медленными магнитозвуковыми модами. По этой причине для этих волн также реализуется эффект затухания, обусловленный фазовым перемешиванием. Поэтому в обычных условиях магнитостатического равновесия магнитосферной плазмы тороидальные и полоидальные альфвеновские моды не существуют. Для их реализации (появления) необходимо наличие внешних энергетических источников, связанных с солнечным ветром, которые резонансным образом раскачивают собственные моды. После окончания действия источника эти моды затухают.

Отметим также, что в работах [95, 165] исследовалось подавление резонансных УНЧ-мод турбулентностью плазменной среды. В работах [99, 166] был рассмотрен другой механизм затухания УНЧ-мод, обусловленный авроральной областью ускорения частиц.

3.3. Поперечно-мелкомасштабные УНЧ-волны в дипольном магнитном поле

В этом подразделе будут получены уравнения для поперечно-мелкомасштабных МГД-мод, генерируемых в плазме с конечным давлением плазмы в околоземной магнитной ловушке. Ранее эти моды рассматривались в работах [1, 52, 87, 141, 145]. В однородной плазменной среде поперечно-мелкомасштабные возмущения удовлетворяют условию

$k_{\perp} \gg 1/b, k_{\parallel}$, где k и k_{\parallel} – поперечная и продольная компоненты волнового вектора, а b – характерный масштаб изменения равновесных величин. В рассматриваемой неоднородной магнитосферной среде под поперечно-мелкомасштабными возмущениями понимаются возмущения, для которых любой компонент x вектора смещения удовлетворяет неравенствам [90]:

$$\frac{|\nabla \psi \cdot \nabla x|}{|\nabla \psi|}, \frac{|\left[\vec{B} \times \nabla \psi \right] \nabla \psi|}{|\nabla \vec{B}| |\nabla \psi|} \ll \frac{x}{b}, \frac{|\vec{B} \cdot \nabla x|}{|\vec{B}|}. \quad (3.34)$$

Эти неравенства будут удовлетворены, если вектор смещения представить в виде

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \hat{\xi}(\vec{r}) \exp(-i\omega t + i\chi(\vec{r})/\varepsilon), \quad (3.35)$$

где безразмерная величина $\varepsilon \ll 1$ характеризует поперечный пространственный масштаб возмущений (их поперечную мелкомасштабность), а χ – поперечный эйконал, удовлетворяющий условию $\vec{k}_{\perp} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{k}_{\perp} = \nabla \chi$.

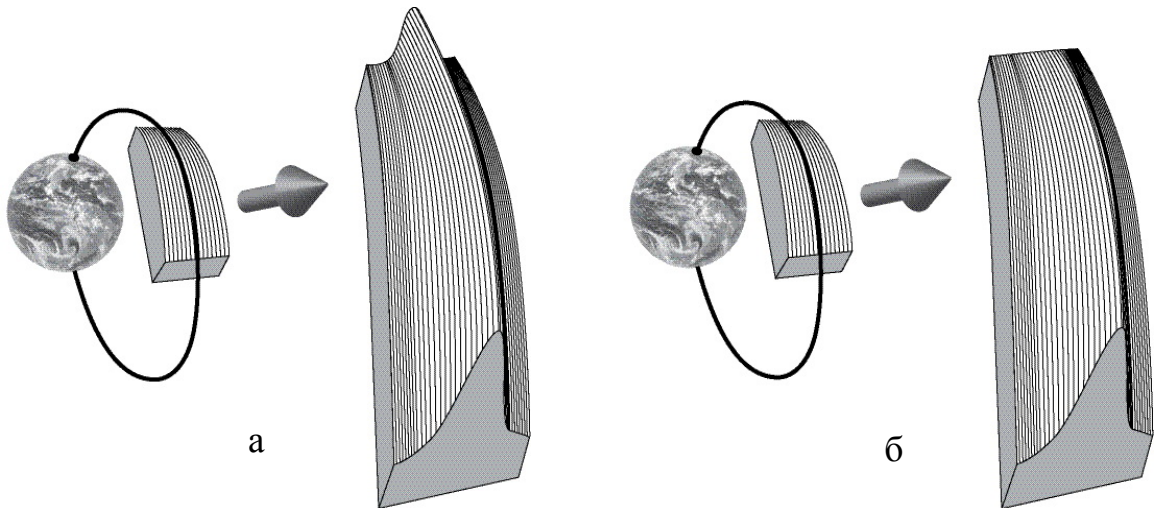


Рис. 3.2. Поперечно-мелкомасштабные моды: а) желобковые; б) баллонные.

В качестве исходных уравнений будем использовать систему уравнений (2.51), полученную в подразделе 2.2. Фигурирующие в этой системе величины $\text{div} \vec{\xi}$ и δp_1 для возмущений вида (3.35) принимают вид:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{\xi} &= \left[\frac{i}{\varepsilon} (\vec{k}_\perp \cdot \hat{\xi}_\perp) + \operatorname{div} \hat{\xi} \right] \exp(-i\omega t + i\chi(\vec{r})/\varepsilon), \\
\delta p_1 &= - \left[\frac{i}{\varepsilon} (\gamma P + |\vec{B}|^2) (\vec{k}_\perp \cdot \hat{\xi}_\perp) + \delta \hat{p}_1 \right] \exp(-i\omega t + i\chi(\vec{r})/\varepsilon), \\
\delta \hat{p}_1 &= \gamma P \operatorname{div} \hat{\xi}_\perp + |\vec{B}|^2 \left(\operatorname{div} \hat{\xi}_\perp + 2\vec{\chi} \cdot \hat{\xi}_\perp \right).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Выражение для δp_1 получено с помощью уравнения (2.51г). Подставляя (3.36) в (2.51а) – (2.51б) и используя уравнение (3.9) а также обычные правила дифференцирования возмущённых величин, получаем уравнения

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\omega^2 \hat{\xi}}{|\nabla \psi|^2} + \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\nabla \psi|^2} \vec{B} \cdot \nabla \hat{\xi} \right) + 2 \left(-\delta p_1 + p' \hat{\xi} + \gamma p \operatorname{div} \hat{\xi} \right) \frac{\chi \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} = \\
= \left(\gamma p + |\vec{B}|^2 \right) \frac{(\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi) (\vec{k}_\perp \cdot \hat{\xi}_\perp)}{|\nabla \psi|^2 \varepsilon^2} - \frac{\nabla \psi \cdot \nabla \delta \hat{p}_1}{|\nabla \psi|^2} - \frac{i}{\varepsilon |\nabla \psi|^2} \left[(\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi) \delta \hat{p}_1 + \right. \\
\left. + \nabla \psi \cdot \nabla \left[(\gamma p + |\vec{B}|^2) \cdot (\vec{k}_\perp \cdot \hat{\xi}_\perp) \right] - 2 \left(\gamma p + |\vec{B}|^2 \right) (\vec{k}_\perp \cdot \hat{\xi}_\perp) (\vec{\chi} \cdot \nabla \psi) \right],
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\omega^2}{\alpha_s} \hat{\eta} + \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\alpha_s} \vec{B} \cdot \nabla \hat{\eta} \right) = \left(\gamma p + |\vec{B}|^2 \right) \frac{(\vec{k}_\perp \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi])}{|\vec{B}|^2} \times \\
\times \frac{(\vec{k}_\perp \cdot \hat{\xi}_\perp)}{\varepsilon^2} - \left(\frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} \right) \cdot \nabla \delta \hat{p}_1 - \frac{i}{\varepsilon |\vec{B}|^2} \left[(\vec{k}_\perp \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi]) \delta \hat{p}_1 + \right. \\
\left. + ([\vec{B} \times \nabla \psi] \cdot \nabla) \left[\left(\gamma p + |\vec{B}|^2 \right) (\vec{k}_\perp \cdot \hat{\xi}_\perp) \right] \right],
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\rho \omega^2 \hat{\tau} + \gamma p \vec{B} \cdot \nabla \operatorname{div} \hat{\xi} = 0. \tag{3.39}$$

Заметим, что в уравнениях (3.37)-(3.39) присутствуют слагаемые различного порядка малости. Поскольку частота колебаний должна быть существенно меньше гироскопической частоты ионов (иначе перестанет выполняться приближение МГД), то члены, содержащие ω^2 , должны иметь нулевой порядок малости по ε . Поэтому, большие слагаемые,

пропорциональные ε^{-2} и ε^{-1} необходимо в указанных уравнениях исключить, что получается, если на эйконал и возмущённые величины наложить некоторые условия. Следует также отметить, что из тех же соображений применимости приближений МГД параметр ε не может быть слишком малым, чтобы поперечный масштаб возмущений не стал сравним с гироскопическим радиусом ионов.

Приравнивая к нулю в (3.37)-(3.38) слагаемые порядка $1/\varepsilon^2$, получаем равенство

$$\vec{k}_\perp \cdot \hat{\xi}_\perp = \hat{\xi} \frac{\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} + \hat{\eta} \frac{\vec{k}_\perp \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} = 0. \quad (3.40)$$

Обращение в ноль слагаемых $1/\varepsilon$ приводит к уравнению

$$\frac{\delta \hat{p}_1}{|\vec{B}|^2} = \beta \operatorname{div} \hat{\xi} + \operatorname{div} \hat{\xi}_\perp + 2 \vec{\chi} \cdot \hat{\xi}_\perp = 0,$$

которое мы перепишем в виде

$$\operatorname{div} \hat{\xi} = \frac{1}{1 + \beta} \left[\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\hat{\tau}}{|\vec{B}|^2} \right) - 2 \hat{\xi} \frac{\vec{\chi} \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right], \quad (3.41)$$

где, как и ранее, $\beta = \gamma p / |\vec{B}|^2$. Уравнение (3.41), как было объяснено в работе [90], описывает эффект отщепления быстрой магнитозвуковой волны для поперечно-мелкомасштабных возмущений. Оставшиеся в (3.37)-(3.39) уравнения порядка ε^0 имеют вид

$$\rho \frac{\omega^2 \hat{\xi}}{|\nabla \psi|^2} + \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\nabla \psi|^2} \vec{B} \cdot \nabla \hat{\xi} \right) + 2 \left(p' \hat{\xi} + \gamma p \operatorname{div} \hat{\xi} \right) \frac{\vec{\chi} \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} = 0, \quad (3.42)$$

$$\rho \frac{\omega^2}{\alpha_s} \hat{\eta} + \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\alpha_s} \vec{B} \cdot \nabla \hat{\eta} \right) = 0, \quad (3.43)$$

$$\rho \omega^2 \hat{\tau} + \gamma p \vec{B} \cdot \nabla \operatorname{div} \hat{\xi} = 0 \quad (3.44)$$

и являются совместно с уравнениями (3.40) и (3.41) исходными уравнениями для исследования поляризации поперечно-мелкомасштабных УНЧ возмущений.

Полученные уравнения (3.40), (3.42)-(3.44) существенно зависят от направления вектора \vec{k}_\perp , которое, совпадает с направлением возмущённого электрического поля $\delta \vec{E}_\perp$. В справедливости этого утверждения можно убедиться, используя выражение для возмущённого электрического поля

$$\delta \vec{E}_\perp = -\frac{1}{c} [\delta \vec{v} \times \vec{B}]. \quad (3.45)$$

Умножив (3.45) векторно на \vec{k}_\perp , и, учитывая (3.40), получаем уравнение

$$[\vec{k}_\perp \times \delta \vec{E}_\perp] = 0. \quad (3.46)$$

Из (3.46) вытекает сделанное утверждение, т.е. $\vec{k}_\perp \parallel \delta \vec{E}_\perp$. Следовательно, вектор \vec{k}_\perp определяет поляризацию возмущений. Случай $\delta \vec{E}_\perp = \delta E_\phi \vec{e}_\phi$ отвечает полоидальным возмущениям $\vec{\xi}_\perp = \xi_\psi \vec{e}_\psi$, а случай $\delta \vec{E}_\perp = \delta E_\psi \vec{e}_\psi$ соответствует тороидальным возмущениям $\vec{\xi}_\perp = \xi_\phi \vec{e}_\phi$.

3.4 Поляризационные характеристики поперечно-мелкомасштабных МГД-мод.

Положим в полученных уравнениях

$$\frac{\vec{k}_\perp \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} = \frac{\vec{k}_\perp \cdot \nabla \varphi}{|\nabla \varphi|^2} = 0. \quad (3.47)$$

Из уравнений (3.40), (3.42) - (3.44) в этом случае получаем

$$\hat{\xi} = 0, \quad \hat{\tau} = 0, \quad \hat{\eta} \neq 0, \quad \text{div} \hat{\xi} = \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} \cdot \nabla \hat{\eta} = \frac{\nabla \varphi \cdot \nabla \hat{\eta}}{|\nabla \varphi|^2} = 0. \quad (3.48)$$

Амплитуда $\hat{\eta}$ удовлетворяет уравнению (3.44)

$$\rho \frac{\omega^2}{\alpha_s} \hat{\eta} + \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\alpha_s} \vec{B} \cdot \nabla \hat{\eta} \right) = 0,$$

которое описывает тороидальные альфвеновские моды (см. Рис. 3.1а).

Пусть теперь вектор \vec{k}_\perp удовлетворяет условию

$$\frac{\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} = 0.$$

В этом случае $\hat{\eta} = 0$, $\hat{\xi} \neq 0$ и $\hat{\tau} \neq 0$ и амплитуды $\hat{\xi}$ и $\hat{\tau}$ удовлетворяют уравнениям

$$\rho \frac{\omega^2 \hat{\xi}}{|\nabla \psi|^2} + \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\nabla \psi|^2} \vec{B} \cdot \nabla \hat{\xi} \right) + 2 \left(p' \hat{\xi} + \gamma p \text{div} \hat{\xi} \right) \frac{\vec{\chi} \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} = 0, \quad (3.49)$$

$$\rho \omega^2 \hat{\tau} + \gamma p \vec{B} \cdot \nabla \text{div} \hat{\xi} = 0, \quad (3.50)$$

$$\text{div} \hat{\xi} = \frac{1}{1 + \beta} \left[\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\hat{\tau}}{|\vec{B}|^2} \right) - 2 \hat{\xi} \frac{\vec{\chi} \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right], \quad (3.51)$$

которые описывают «зацепленные» полоидальную альфвеновскую и медленную магнитозвуковую моды (см. Рис. 3.1б)

Рассмотрим теперь более общий случай

$$\frac{\vec{k}_\perp \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} \neq 0, \quad \frac{\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \neq 0,$$

который описывает поперечно-мелкомасштабные моды с “промежуточной” поляризацией. Для описания таких мод мы будем использовать два векторных равенства

$$\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right) = 0, \quad \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\vec{k}_\perp \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} \right) = 0. \quad (3.52)$$

Для доказательства равенств (3.52) используем векторное уравнение

$$\vec{a} \cdot \nabla (\vec{b} \cdot \nabla c) = \vec{b} \cdot \nabla (\vec{a} \cdot \nabla c) + \nabla c \cdot (\vec{a} \operatorname{div} \vec{b} - \vec{b} \operatorname{div} \vec{a} - \operatorname{rot} [\vec{a} \times \vec{b}]). \quad (3.53)$$

Из (3.52) и (3.53) находим

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right) &= \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \cdot \nabla (\vec{B} \cdot \vec{k}_\perp) + \vec{k}_\perp \cdot \left(\vec{B} \operatorname{div} \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} - \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \operatorname{div} \vec{B} - \right. \\ &\left. - \operatorname{rot} \left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right] \right) = -\vec{k}_\perp \cdot \operatorname{rot} \left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

При получении (3.54) было учтено, что $\vec{k}_\perp = \nabla \chi$. Упростим (3.54), разложив вектор $\operatorname{rot} \left[\vec{B} \times \nabla \psi / |\nabla \psi|^2 \right]$ по ортогональным направлениям $\nabla \psi$, $[\vec{B} \times \nabla \psi]$, \vec{B} :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right] &= \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \left(\nabla \psi \cdot \operatorname{rot} \left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right] \right) + \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2 |\nabla \psi|^2} \times \\ &\times \left([\vec{B} \times \nabla \psi] \cdot \operatorname{rot} \left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right] \right) + \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} \left(\vec{B} \cdot \operatorname{rot} \left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right] \right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Преобразуем слагаемые в правой части уравнения (3.55), используя векторное равенство

$$\operatorname{div} [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right] &= \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \operatorname{div} \left(\left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right] \times \nabla \psi \right) + \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2 |\nabla \psi|^2} S + \\
\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} \left(\operatorname{div} \left(\left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right] \right) \times \vec{B} \right) &+ \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} \left(\left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right] \cdot \operatorname{rot} \vec{B} \right),
\end{aligned} \tag{3.56}$$

где величина S , как и в подразделе 2.2, описывает перекрещивание силовых линий магнитного поля – шир:

$$S = \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \cdot \operatorname{rot} \left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right].$$

Упростим выражение (3.56), используя хорошо известные векторные равенства

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \left(\left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right] \times \nabla \psi \right) &= \operatorname{div} \left(\vec{B} \left(\frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \cdot \nabla \psi \right) - \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} (\vec{B} \cdot \nabla \psi) \right) = \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\
\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} \operatorname{div} \left(\left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right] \times \vec{B} \right) &= -\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} \operatorname{div} \left(\vec{B} \left(\vec{B} \cdot \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right) - \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} (\vec{B} \cdot \vec{B}) \right) = \\
&= \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} (\vec{B} \cdot \vec{B}) \right) = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} \operatorname{div} (\nabla \psi \alpha_s), \\
\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} \left(\left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right] \cdot \operatorname{rot} \vec{B} \right) &= \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} \left(\vec{j} \cdot \left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right] \right) = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} \left([\vec{j} \times \vec{B}] \cdot \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right) = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} p'.
\end{aligned}$$

В результате находим

$$\operatorname{rot} \left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right] = \left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right] S + \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} (p' + \operatorname{div}(\alpha_s \cdot \nabla \psi)). \tag{3.57}$$

Подставляя (3.57) в (3.54), получаем

$$\vec{B} \cdot \nabla \left(\vec{k}_\perp \cdot \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right) = \vec{k}_\perp \cdot \left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right] S. \tag{3.58}$$

Поскольку в рассматриваемой дипольной геометрии магнитного поля $S=0$ (см. подраздел 3.2), то из (3.58) получаем первое уравнение в (3.52), т.е.

$$\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right) = 0.$$

Для доказательства второго уравнения в (3.52), используем, как и выше, уравнение (3.53). Тогда, из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\vec{k}_\perp \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} \right) &= \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} \cdot \nabla (\vec{B} \cdot \vec{k}_\perp) + \vec{k}_\perp \cdot \left(\vec{B} \operatorname{div} \left(\frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} \right) \right) - \\ &- \vec{k}_\perp \cdot \left(\frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} \operatorname{div} \vec{B} \right) - \operatorname{rot} \left(\frac{\vec{B} \times [\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} \right) \cdot \vec{k}_\perp = -\vec{k}_\perp \cdot \operatorname{rot} \left(\frac{\vec{B} \times [\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} \right) = \\ &= -\vec{k}_\perp \cdot \operatorname{rot} \left(\frac{\vec{B}(\vec{B} \cdot \nabla \psi)}{|\vec{B}|^2} - \frac{\nabla \psi (\vec{B} \cdot \vec{B})}{|\vec{B}|^2} \right) = \vec{k}_\perp \cdot \operatorname{rot}(\nabla \psi) = 0 \end{aligned}$$

получаем указанное уравнение. Из доказанных уравнений (3.52) вытекает ещё одно очевидное равенство

$$\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi}{\vec{k}_\perp \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi]} \alpha_s \right) = 0. \quad (3.59)$$

Проведём простейшие алгебраические преобразования и перепишем уравнения (3.42) и (3.43) в другом, но эквивалентном виде. Для получения первого уравнения умножим уравнение (3.42) на $(\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi)$, а уравнение

(3.43) на $\vec{k}_\perp \cdot \left[\vec{B} \times \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right]$ и сложим получившиеся уравнения. В результате

приходим к уравнению

$$\begin{aligned}
& (\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi) \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\nabla \psi|^2} \vec{B} \cdot \nabla \hat{\xi} \right) + 2(\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi) \left(P' \hat{\xi} + \gamma P \operatorname{div} \hat{\xi} \right) \frac{\chi \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} - \\
& - \frac{\vec{k}_\perp \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{(\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi)}{(\vec{k}_\perp \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi])} \vec{B} \cdot \nabla \hat{\xi} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

При получении (3.60) использовалось равенство

$$\frac{1}{\alpha_s} \vec{B} \cdot \nabla \hat{\eta} = - \frac{\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi}{\vec{k}_\perp \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi]} \vec{B} \cdot \nabla \hat{\xi}, \tag{3.61}$$

вытекающее из (3.40) и (3.59). Последнее слагаемое в (3.60) преобразуем с учётом (3.59) следующим образом

$$\begin{aligned}
& \frac{(\vec{k}_\perp \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi])}{|\nabla \psi|^2} \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{(\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi)}{(\vec{k}_\perp \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi])} \vec{B} \cdot \nabla \hat{\xi} \right) = \frac{(\vec{k}_\perp \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi])}{|\nabla \psi|^2} \times \\
& \times \alpha_s \frac{(\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi)}{(\vec{k}_\perp \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi])} \times \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\alpha_s} \vec{B} \cdot \nabla \hat{\xi} \right) = (\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi) \left[\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\nabla \psi|^2} \vec{B} \cdot \nabla \hat{\xi} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\alpha_s} (\vec{B} \cdot \nabla \hat{\xi}) \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\alpha_s}{|\nabla \psi|^2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Подставляя (3.62) в (3.60), получаем первое уравнение

$$2 \left(p' \hat{\xi} + \gamma P \operatorname{div} \hat{\xi} \right) \frac{\chi \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} + \frac{1}{\alpha_s} (\vec{B} \cdot \nabla \hat{\xi}) \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\alpha_s}{|\nabla \psi|^2} \right) = 0. \tag{3.63}$$

Для получения второго уравнения перепишем уравнение (3.43) с учётом (3.40) и (3.61) в виде:

$$\rho \omega^2 \frac{(\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi)}{(\vec{k}_\perp \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi])} \hat{\xi} + \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{(\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi)}{(\vec{k}_\perp \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi])} \vec{B} \cdot \nabla \hat{\xi} \right) = 0. \tag{3.64}$$

Из (3.59) и (3.64) находим

$$\rho \frac{\omega^2}{\alpha_s} \hat{\xi} + \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\alpha_s} \vec{B} \cdot \nabla \hat{\xi} \right) = 0. \quad (3.65)$$

Это уравнение также получается из (3.42) и (3.63). В результате мы приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \rho \frac{\omega^2}{\alpha_s} \hat{\xi} + \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\alpha_s} \vec{B} \cdot \nabla \hat{\xi} \right) &= 0, \\ \rho \omega^2 \hat{\tau} + \gamma p \vec{B} \cdot \nabla \operatorname{div} \hat{\xi} &= 0, \\ 2 \left(p' \hat{\xi} + \gamma p \operatorname{div} \hat{\xi} \right) \frac{\vec{\chi} \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} + \frac{1}{\alpha_s} (\vec{B} \cdot \nabla \hat{\xi}) \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\alpha_s}{|\nabla \psi|^2} \right) &= 0, \\ \operatorname{div} \hat{\xi} &= \frac{1}{1 + \beta} \left[\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\hat{\tau}}{|\vec{B}|^2} \right) - 2 \hat{\xi} \frac{\vec{\chi} \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Видно, что система (3.66) состоит из трех уравнений, содержащих две неизвестные величины $\hat{\xi}$ и $\hat{\tau}$. Это обстоятельство свидетельствует о том, что вероятность реализации поперечно – мелкомасштабных мод с «промежуточной» поляризацией крайне мала.

Полученные результаты допускают следующую достаточно простую интерпретацию условий реализации УНЧ – мод. Указанные моды генерируются при условии, что вектор возмущающей силы (или вектор смещения) направлен определенным образом по отношению к магнитным поверхностям. Если возмущающая сила действует на элементарный плазменный объем вдоль магнитной поверхности, то в этом случае генерируются тороидальные альфвеновские моды. Такая ситуация реализуется в магнитосфере в утреннем и вечернем секторах. Если же возмущающая сила лежит в плоскости, перпендикулярной магнитной поверхности, то УНЧ возмущения реализуются в виде полоидальных альфвеновских и медленных магнитозвуковых мод. По - видимому, последние

возмущения должны генерироваться в «лобовой» части магнитосферы под действием возмущений в солнечном ветре. В областях между дневной частью магнитосферы и «утренним» и «вечерним» секторами могут генерироваться собственные тороидальные, полоидальные альфвеновские моды и медленные магнитозвуковые моды.

3.5. Верификация результатов

Магнитосферная плазменная система, выведенная из положения равновесия внешним возмущением, будет совершать УНЧ-колебания на частотах, являющихся собственными значениями уравнений малых колебаний, полученных выше. В качестве внешнего возмущения могут выступать, например, возмущения в солнечном ветре, распространяющиеся от магнитопаузы в виде быстрой магнитозвуковой волны [2, 53]. Приведённые выше уравнения малых колебаний можно использовать для характеристики поляризационных свойств УНЧ-возмущений. Это связано с тем обстоятельством, что космические аппараты в основном измеряют возмущённые электрические и магнитные поля, поэтому поляризационные свойства УНЧ возмущений удобно представить в терминах этих величин. Полученные уравнения позволяют проанализировать возмущения магнитного поля и давления в распространяющихся модах.

Для сравнения полученных аналитических результатов с измеренными данными с космических аппаратов, рассмотрим статистические закономерности параметров собственных мод геомагнитных возмущений в зависимости от их поляризации по данным с космического аппарата AMPTE/CSE. Распределение наблюдаемых УНЧ событий в зависимости от магнитного локального времени наблюдения (Magnetic Local Time – MLT) и поляризации магнитного поля в волне получено совместно с А.В. Агапитовым [3^а] и представлено на рис. 3.3. Диаметр кружка на диаграмме

пропорционален отношению продольной компоненты возмущения магнитного поля b_{\parallel} (относительно локального магнитного поля) к поперечной компоненте b_{\perp} . Таким образом, чем больше диаметр кружка, тем больше возмущение магнитного давления в волне. В качестве параметра, характеризующего поляризацию волны, выбрано отношение амплитуды возмущенного полоидального магнитного поля b_{ψ} к амплитуде возмущенного тороидального поля b_{φ} . С определенным таким образом параметром поляризации тороидальные волны группируются в нижней части диаграммы, а полоидальные – в верхней.

В работе [3] было экспериментально показано, что в магнитосфере Земли наблюдается частичная компенсация возмущенного давления магнитного поля возмущенным кинетическим давлением плазмы. В этой работе также отмечено, что причина этого эффекта обусловлена тем обстоятельством, что волновые процессы в магнитосфере контролируются изменением магнитного поля, а не возмущенным давлением плазмы. На основе большого массива экспериментальных данных было установлено, что обычно реализуется условие $\delta p_1 = 0$ и поэтому согласно полученным выше результатам в магнитосферной плазме генерируются собственные поперечно – мелкомасштабные моды. Таким образом, БМЗ – волна, генерируемая в магнитосфере внешними источниками, является естественной причиной генерации собственных поперечно – мелкомасштабных мод.

Как видно из рис. 3.3, тороидальные альфвеновские волны генерируются без возмущения продольного давления магнитного поля и, соответственно, без возмущения давления плазмы. Наиболее часто они регистрируются на флангах магнитосферы Земли. При этом отношение амплитуды продольной компоненты возмущения магнитного поля к поперечной не превышает 0,5. Для большинства событий с тороидальными возмущениями магнитного поля это отношение составляет менее 0,1. Наблюдаемая на рис. 3.3 асимметрия утреннего и вечернего секторов

магнитосферы может быть объяснена в рамках механизма генерации неустойчивостью Келвина-Гельмгольца на флангах магнитосферы или волноводной модой.

Для пояснения поведения тороидальных, полоидальных альфвеновских и медленных магнитозвуковых волн рис. 3.3 обратимся к результатам работы [9^а], которые графически представлены на рис. 3.4 и рис. 3.5. На рис. 3.5 качественно изображена система координат, связанная с локальным вектором

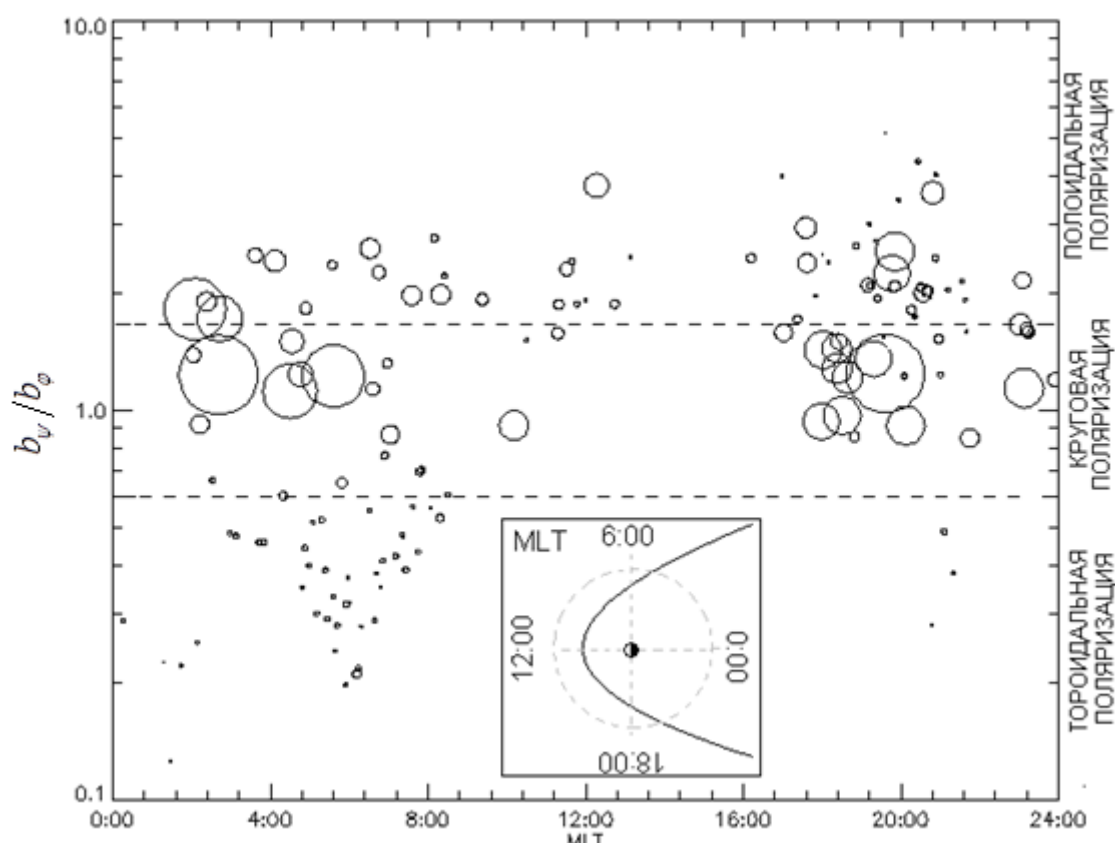


Рис.3.3. Распределение ULF событий, зарегистрированных на борту АРМТЕ/ССЕ в 1986 г. в зависимости от магнитного локального времени наблюдения и поляризации магнитного поля в волне.

магнитного поля и меридиональной плоскостью. Направление ∇x на этом рисунке совпадает с направлением $\nabla \varphi$, т.е. тороидального магнитного поля, ∇y – с градиентом полоидального магнитного потока $\nabla \psi$, ∇z – направлен вдоль магнитного поля. В этой системе координат на рис. 3.4а представлены три компоненты магнитного поля в соответствии с измерениями,

проведенными 18. 03. 1998 на борту КА “ Equator – S ”. Из указанного рисунка хорошо видно, что в основном реализуются тороидальные периодические возмущения магнитного поля, так что $b_\phi > b_\psi, b_\perp$. Возмущением кинетического давления плазмы, полоидального и продольного магнитных полей в данном случае можно пренебречь, что полностью соответствует полученным условиям генерации тороидальных альфвеновских мод. На рис. 3.4б в верхней части приведены три компоненты магнитного поля, измеренные на том же самом КА в другие моменты времени. Видно, что в основном возмущается продольная компонента магнитного поля, причем $b_\perp > b_\psi > b_\phi$. В нижней части рис. 3.4б серая кривая показывает поведение возмущенного давления магнитного поля, а черная – возмущенное кинетическое давление плазмы. Для низкочастотных волн в приближении идеальной магнитной гидродинамики легко показать, что колебания возмущенных кинетического давления плазмы и возмущенного магнитного давления происходят в фазе для быстрой магнитозвуковой волны и в противофазе – для меленной магнитозвуковой волны. Из экспериментальных данных, приведенных на рис. 3.4б, видно, что возмущение кинетического давления в волновом событии происходит в противофазе с возмущением давления магнитного поля, т.е. $\delta p \propto -b_\perp B$, что характерно для ММЗ – волны.

Для полоидальных альфвеновских волн ($b_\psi > b_\phi$) на рис. 3.3 характерно наличие существенной возмущённой компоненты поперечного давления возмущенного магнитного поля и, соответственно, возмущённого давления плазмы. Отношение амплитуд продольного и поперечного возмущения магнитного поля в волне может достигать 4. В среднем это отношение в полоидальных волнах составляет 1,5 – 2,5.

Максимальные амплитуды продольной компоненты возмущения магнитного поля в волне наблюдаются в ММЗ - волновых событиях с промежуточной ($b_\phi/b_\psi \approx 1$) поляризацией, близкой к круговой. Отношение

продольной и поперечной амплитуд возмущения может достигать значений 5 – 7. Видно, что таких событий достаточно много и они характеризуются

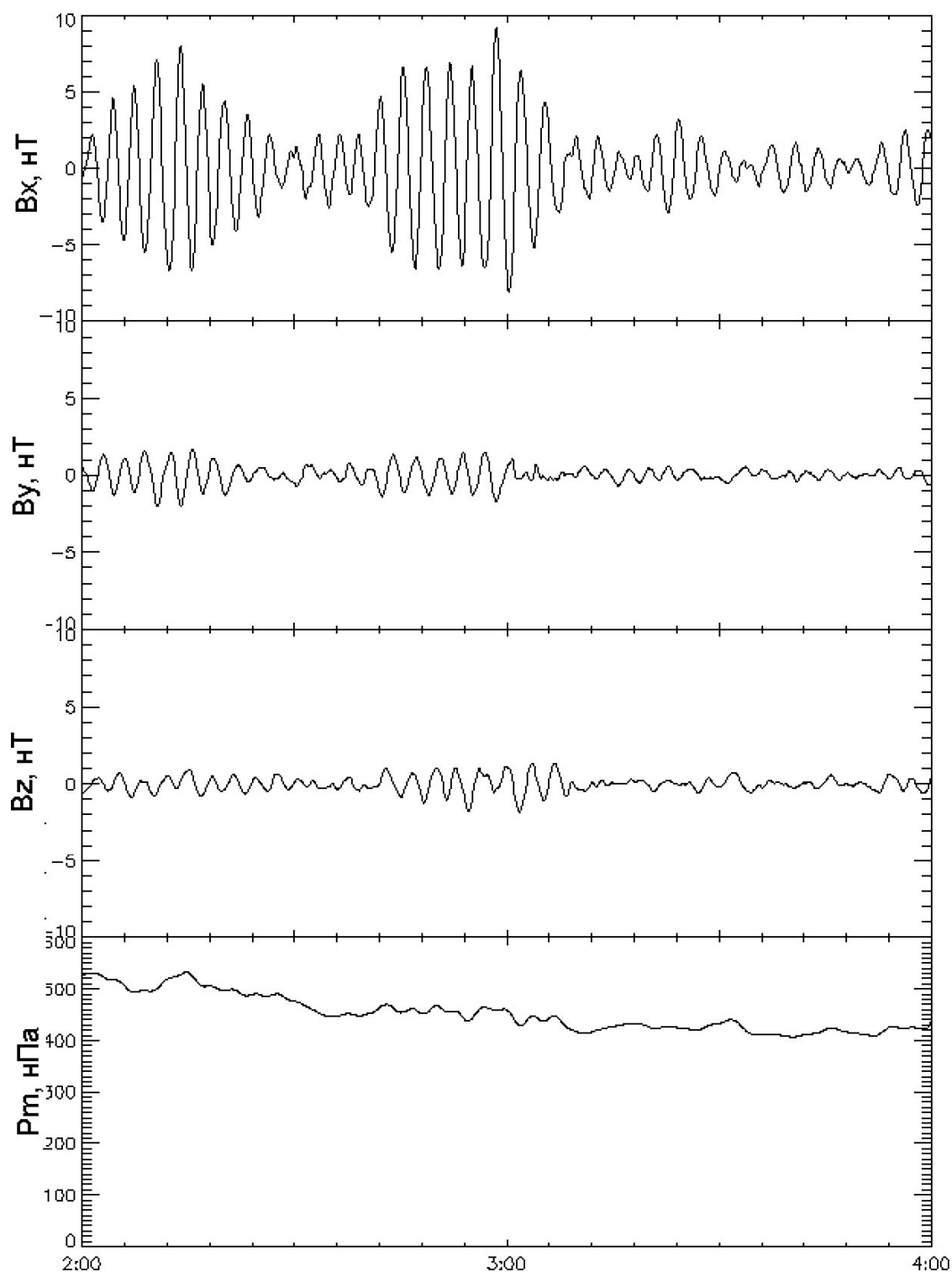


Рис.3.4.а. Компоненты магнитного поля в ЛСК (см. рис. 3.5), измеренные 18. 03. 1998 на космическом аппарате «Equator – S» в период 02:00 – 04:00 UT.

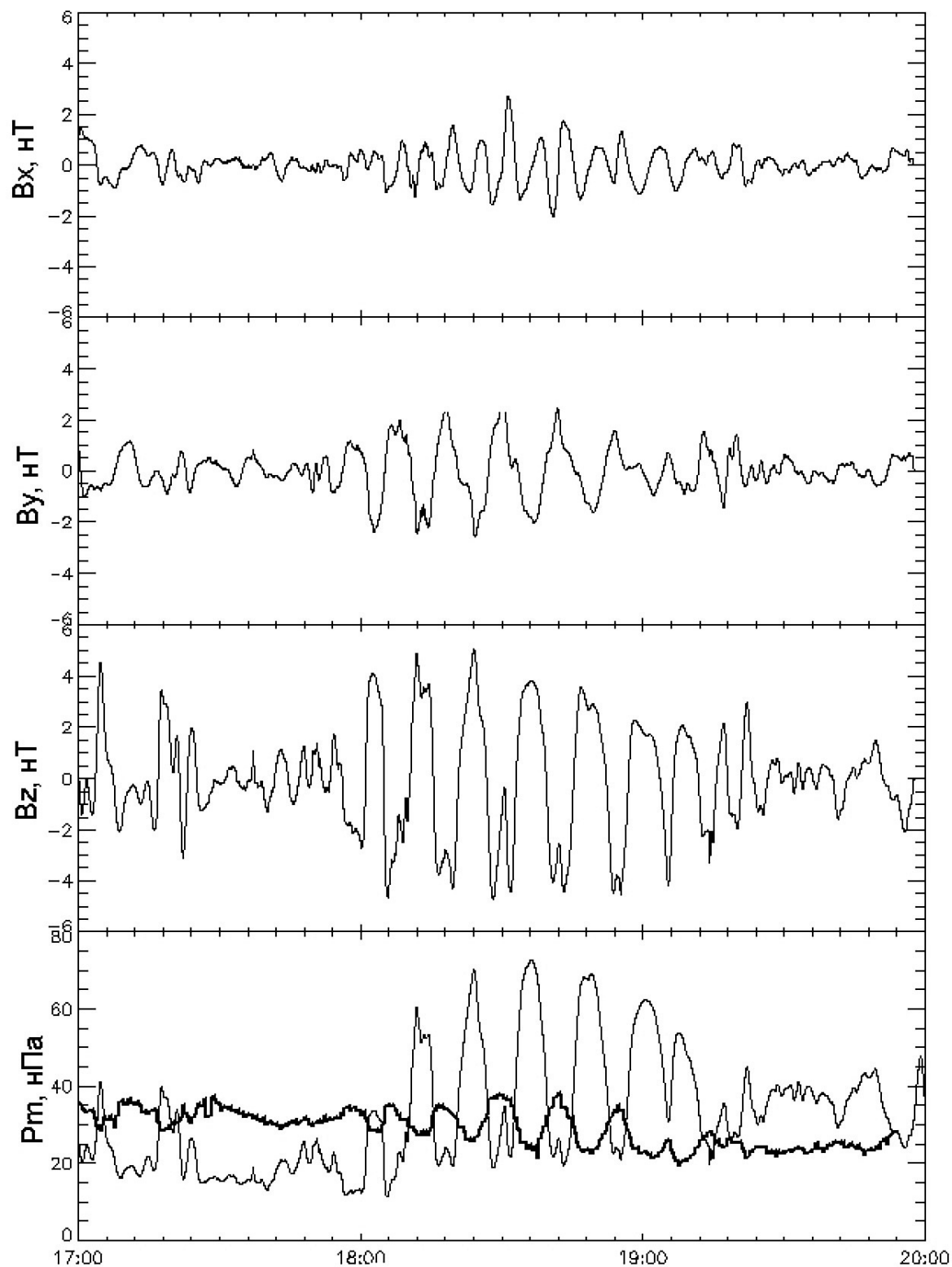


Рис.3.4.б. Компоненты магнитного поля в ЛСК,
измеренные 18. 03. 1998 на космическом аппарате «Equator – S» в период
17:00 – 20:00 UT.

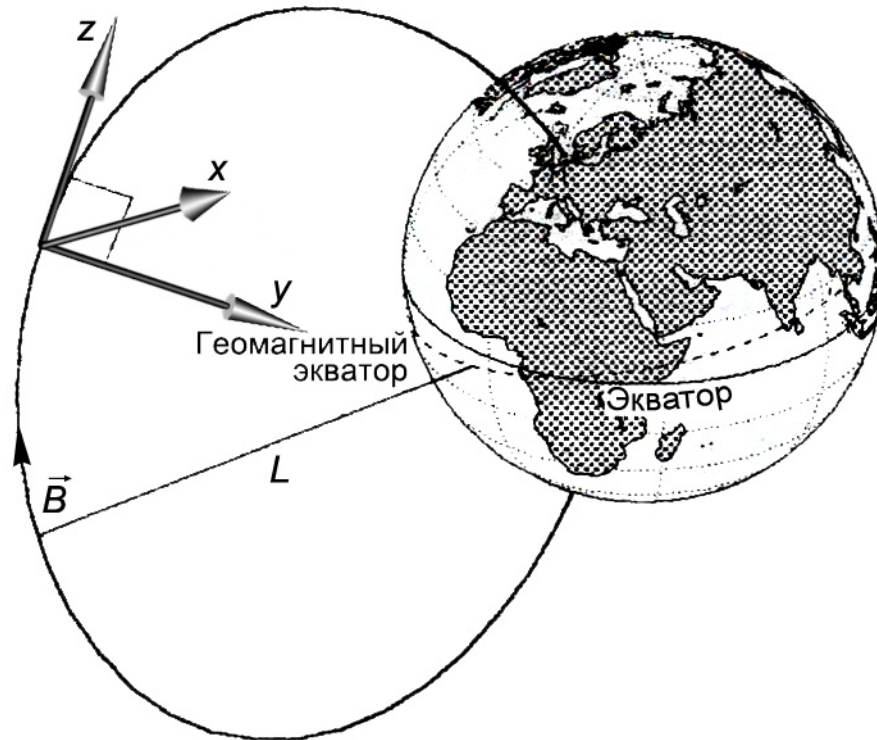


Рис.3.5. Локальная система координат (ЛСК), связанная с магнитным полем. Ось z направлена вдоль магнитного поля, ось x перпендикулярна к магнитной меридиональной плоскости (плоскости, в которой лежат силовые линии магнитного поля), а ось y лежит в меридиональной плоскости.

достаточно большими величинами возмущённого поперечного магнитного поля и давления плазмы. Эти результаты неплохо согласуются с условиями генерации полоидальных альфвеновских мод и связанных с ними медленных магнитозвуковых мод.

Таким образом, зарегистрированные на АМРТЕ/ССЕ собственные моды в УНЧ диапазоне по своим поляризационным характеристикам близки к предсказанным выше поперечно – мелкомасштабным модам. Существование мод с такими поляризациями в магнитосфере было также подтверждено в работах [53, 93, 147, 181]. Моды с “промежуточной” поляризацией пока экспериментально не наблюдались.

3.6. Выводы к разделу.

1. С помощью полученной в разделе 2 системы уравнений малых колебаний (2.51) для плазмы, находящейся в дипольном магнитном поле, рассмотрены собственные УНЧ моды, которые могут реализовываться в указанной геометрии магнитного поля. Для нахождения этих мод были исключены из рассмотрения быстрые магнитозвуковые моды, поскольку они не могут быть собственными модами открытой магнитосферной системы. В результате было показано, что уравнения (2.51) описывают два типа собственных УНЧ мод: тороидальные альфвеновские моды ($\xi = 0, \tau = 0, \eta \neq 0$) и полоидальные альфвеновские моды, «зацепленные» с медленными магнитозвуковыми модами ($\xi \neq 0, \tau \neq 0, \eta = 0$). Этот результат является универсальным для дипольного магнитного поля, поскольку получен из уравнений малых колебаний, в которых не наложено никаких ограничений на амплитуды возмущений.
2. Из упомянутых выше уравнений (2.51) следует, что медленная магнитозвуковая мода ($\xi = 0, \eta = 0, \tau \neq 0$) в дипольном магнитном поле самостоятельно не реализуется.
3. Установлено, что тороидальные альфвеновские моды затухают в дипольной геометрии вследствие эффекта перемешивания фаз возмущений, обусловленного зависимостью частоты колебаний от координаты, поперечной к магнитным поверхностям. Отмечено, что точно такой же эффект должен иметь место и для полоидальных альфвеновских мод.
4. Из уравнений (2.51) получены уравнения малых колебаний (3.40), (3.42) - (3.44) для поперечно-мелкомасштабных УНЧ волн в дипольном магнитном поле. В рассматриваемой неоднородной среде эти возмущения удовлетворяют неравенствам (3.34). Отмечено, что указанные неравенства будут удовлетворены, если вектор смещения элементарного объема плазмы берется в эйкональном приближении (3.35) и удовлетворяет условию

$\vec{k}_\perp \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{k}_\perp = \nabla s$, где s – эйконал. Подстановка (3.35) в уравнения (2.51) приводит к тому, что в уравнениях присутствуют слагаемые разного порядка малости. Исключение из этих уравнений больших слагаемых, пропорциональных ε^{-2} и ε^{-1} , приводит к уравнениям (3.42)-(3.44), которые описывают «продольную» структуру возмущений и к уравнениям (3.40) и (3.41), описывающим поперечную структуру возмущений. Установлено, что направление вектора \vec{k}_\perp совпадает с направлением возмущенного электрического поля.

5. Показано, что уравнения (3.52), описывающие изменения вектора \vec{k}_\perp вдоль силовых линий, накладывают ограничения на «продольную» и «поперечную» структуры поперечно-мелкомасштабных мод в дипольном поле. Установлено, что тороидальные ($\vec{k}_\perp \cdot \nabla \varphi = 0$) и полоидальные альфвеновские моды ($\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi = 0$) реализуются без каких-либо существенных ограничений. Что касается поперечно-мелкомасштабных мод со «смешанной» поляризацией ($\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi \neq 0$, $\vec{k}_\perp \cdot \nabla \varphi \neq 0$), то для реализации этих мод должно выполняться дополнительное дифференциальное уравнение (3.63). Это уравнение, отсутствующее в случаях $\vec{k}_\perp \cdot \nabla \psi = 0$ и $\vec{k}_\perp \cdot \nabla \varphi = 0$, резко ограничивает вероятность реализации мод со «смешанной» поляризацией. По-видимому, по этой причине эти моды до сих пор не наблюдались с космических аппаратов.

6. Проведена верификация полученных результатов по измерениям с космического аппарата AMPTE/CSE. Показано, что в основном реализуются тороидальные альфвеновские моды и полоидальные альфвеновские моды, зацепленные через радиальную кривизну силовых линий магнитного поля с медленными магнитозвуковыми модами. Эти результаты согласуются с полученными в данном разделе результатами.

РАЗДЕЛ 4. БЕССИЛОВЫЕ ПЛАЗМЕННЫЕ КОНФИГУРАЦИИ В СОЛНЕЧНОМ ВЕТРЕ*

Как отмечалось в разделе 1, в космических плазменных образованиях часто можно пренебречь влиянием тепловой энергии плазмы, т.е. давления, и энергией гравитации. В этом случае реализуются бессилловые плазменные магнитные конфигурации [5, 17, 35, 116], которые характеризуются повышенной устойчивостью.

Известно, что корональные выбросы массы (КВМ) вызывают сильные возмущения солнечного ветра и магнитные бури на Земле [13, 14, 36, 44, 68, 119]. Физические механизмы появления КВМ еще недостаточно изучены [64, 100, 131]. К настоящему времени многими авторами построены модели (например, [24, 36, 44, 80, 94, 173, 191, 192]), объясняющие эффекты расширения и изменения скорости КВМ в солнечном ветре. Однако структура этих образований, которые можно отождествлять с наблюдаемыми “магнитными облаками”, практически не рассматривались.

Между тем, знание структуры КВМ в солнечном ветре очень важно для изучения их взаимодействия с магнитосферой Земли. Ниже изложены модели, в соответствии с которыми КВМ рассматриваются как различные бессилловые магнитные конфигурации, которые движутся в плазменном потоке – солнечном ветре [56, 162, 171]. Структура магнитных плазмоидов предполагается осесимметричной. Поскольку плазмоиды предполагаются бессилловыми, основное внимание уделено нахождению геометрии магнитного поля. В отличие от других работ, где рассматриваются бессилловые магнитостатические конфигурации плазмы, ниже приведены математические модели бессилловых конфигураций в потоке плазмы, а также с учётом движения плазмы внутри самой конфигурации. Необходимо

*В основу данного раздела положены результаты работы [5^a] и докладов [19^a, 21^a].

отметить, что возникающие магнитные структуры обычно характеризуются выделенным направлением скорости, которую можно считать одномерной.

4.1. Основные уравнения

Для описания магнитных конфигураций используем произвольную ортогональную систему координат x_1, x_2, x_3 с координатами Ламе g_1, g_2, g_3 и базисными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ [7]. Считаем, что магнитная индукция \vec{B} зависит только от координат x_1 и x_2 , т. е. $\vec{B} = \vec{B}(x_1, x_2)$. Далее полагаем, что скорость плазмы $\vec{V}(x_1, x_2)$ имеет только одну компоненту в направлении \vec{e}_3 , т. е. $V_1 = 0, V_2 = 0$.

Как отмечалось в разделе 1, отличительным свойством бессиловой плазменной структуры является условие параллельности тока $\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \vec{B}$ и магнитного поля \vec{B}

$$\text{rot} \vec{B} = \gamma \vec{B}. \quad (4.1)$$

Здесь $\gamma(x_1, x_2)$ – скалярная функция, размерность которой предполагается равной $1/R_0$, где R_0 – характерный размер плазменной конфигурации. В рассматриваемой системе координат уравнение (4.1) эквивалентно трем скалярным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_2 g_3} \frac{\partial (B_3 g_3)}{\partial x_2} = \gamma B_1, \quad \frac{1}{g_3 g_1} \frac{\partial (B_3 g_3)}{\partial x_1} = -\gamma B_2, \\ \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial (B_2 g_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial (B_1 g_1)}{\partial x_2} \right) = \gamma B_3. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Легко убедиться, что система уравнений (4.2) сводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка для компоненты магнитного поля B_3

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{g_2}{\gamma g_3 g_1} \frac{\partial (B_3 g_3)}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{g_1}{\gamma g_2 g_3} \frac{\partial (B_3 g_3)}{\partial x_2} \right) = -\gamma \frac{g_1 g_2}{g_3} (B_3 g_3). \quad (4.3)$$

Фигурирующие в уравнении (4.2) компоненты B_1 , B_2 , B_3 магнитного поля не могут быть произвольными. Они удовлетворяют закону Гаусса об отсутствии магнитного заряда $\text{div} \vec{B} = 0$, который в рассматриваемой осесимметричной модели ($\partial/\partial x_3 = 0$) имеет вид

$$\frac{\partial (B_1 g_2 g_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial (B_2 g_1 g_3)}{\partial x_2} = 0. \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) будет автоматически удовлетворено, если выполнены равенства

$$B_1 g_2 g_3 = \frac{\partial \chi}{\partial x_2}, \quad B_2 g_1 g_3 = -\frac{\partial \chi}{\partial x_1}. \quad (4.5)$$

Здесь $\chi(x_1, x_2)$ – некоторая произвольная функция, имеющая смысл магнитного потока. Из уравнений (4.2) и (4.5) следуют очевидные равенства

$$\frac{\partial B_3 g_3}{\partial x_2} = \gamma \frac{\partial \chi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial B_3 g_3}{\partial x_1} = \gamma \frac{\partial \chi}{\partial x_1}. \quad (4.6)$$

Из изложенного выше легко видеть, что возможны два случая, при которых условия (4.6) выполняются: $\gamma = \gamma_0 = \text{const}$ и $\gamma = \partial \varphi / \partial \chi$, где $\varphi(\chi)$ – произвольная функция χ . В первом случае из (4.6) следует

$$B_3 g_3 = \gamma_0 \chi. \quad (4.7)$$

Во втором случае уравнения (4.6) можно переписать в виде

$$B_3 g_3 = \varphi(\chi). \quad (4.8)$$

Далее мы будем считать, что в рассматриваемых плазменных конфигурациях справедливо соотношение $B_3 g_3 = \varphi(\chi)$, которое включает в себя частный случай (4.7), а также присутствует поток плазмы со скоростью $\vec{V}_3 = W(x_1, x_2) \vec{e}_3$. Этот поток не может быть произвольным и должен удовлетворить двум уравнениям магнитной гидродинамики [17, 38]: уравнению индукции Фарадея

$$\text{rot} [\vec{V}_3 \times \vec{B}] = 0 \quad (4.9)$$

и уравнению движения Эйлера

$$\text{rot } \vec{V}_3 \times \vec{V}_3 = \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \left(\frac{V_3^2}{2} \right), \quad (4.10)$$

которые вытекают непосредственно из векторных уравнений идеальной магнитной гидродинамики в предположении стационарного течения плазмы ($\partial/\partial t = 0$). Векторные уравнения (4.9) и (4.10) после несложных преобразований приводятся к скалярному уравнению вида

$$\frac{\partial W B_1 g_2}{\partial x_1} + \frac{\partial W B_2 g_1}{\partial x_2} = \frac{W}{g_3} \left[\frac{\partial B_1 g_2 g_3}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2 g_1 g_3}{\partial x_2} \right] + B_1 g_2 g_3 \frac{\partial W}{\partial x_1} + B_2 g_1 g_3 \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0.$$

Первое слагаемое в этом уравнении согласно уравнению (4.4) равно нулю.

Второе слагаемое с учётом (4.5) перепишем в виде

$$\{W, \chi\}_{x_1 x_2} = 0, \quad (4.11)$$

где $\{a, b\}_{x_1 x_2}$ – скобка Пуассона,

$$\{a, b\}_{x_1 x_2} = \frac{\partial a}{\partial x_1} \frac{\partial b}{\partial x_2} - \frac{\partial a}{\partial x_2} \frac{\partial b}{\partial x_1}.$$

Из общих свойств скобок Пуассона [27] следует, что уравнение (4.11) имеет общее решение вида

$$W = f(\chi),$$

где f – произвольная функция от χ . С учётом этого обстоятельства из уравнения движения (4.10) получим

$$\left[\frac{1}{g_2 g_3} \frac{\partial W g_3}{\partial x_2} \vec{e}_1 - \frac{1}{g_1 g_3} \frac{\partial W g_3}{\partial x_1} \vec{e}_2 \right] \times W \vec{e}_3 = -\frac{W}{g_3} \text{grad } W g_3 = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \left(\frac{V_3^2}{2} \right). \quad (4.12)$$

Из (4.12) следует, что скорость W не может быть произвольной величиной.

Она должна удовлетворять уравнению (4.11) и условию

$$\frac{W}{g_3} \text{grad } W g_3 = \text{grad } F(x_1, x_2). \quad (4.13)$$

Здесь $F(x_1, x_2)$ – некоторая произвольная функция переменных x_1, x_2 . Этот результат следует из следующих соображений. Поскольку плазму можно

считать идеальным газом, то можно ввести в рассмотрение функцию давления P , такую что [23, 26]

$$P = \int \frac{dp}{\rho},$$

откуда следует

$$\nabla P = \frac{\nabla p}{\rho}.$$

В результате получаем уравнение (4.13). Таким образом, только в случае выполнения уравнения (4.13), уравнение (4.10) может быть проинтегрировано. Полученные в этом параграфе результаты справедливы для произвольных магнитных конфигураций, удовлетворяющих условию осесимметричности плазменных конфигураций $\partial/\partial x_3 = 0$.

4.2. Цилиндрическая трубка

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных магнитных конфигураций. Начнем рассмотрение с простейшей (модельной) магнитной конфигурации – цилиндрической плазменной трубки, для описания которой будем использовать цилиндрическую систему координат (r, θ, z) . Последняя связана с введёнными выше координатами x_1, x_2 и x_3 следующими соотношениями

$$x_1 = r, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = z, \quad g_1 = 1, \quad g_2 = r, \quad g_3 = 1.$$

Положим $\gamma = \text{const}$ и будем считать, что компоненты магнитного поля B_r, B_θ, B_z зависят только от координат r и θ . Уравнение (4.3) в этом случае примет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} \right) = -\gamma^2 r B_z$$

и сводится к уравнению

$$r^2 \frac{\partial B_z}{\partial r^2} + r \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial \theta^2} + \gamma^2 r^2 B_z = 0.$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид

$$B_z = B_0 \frac{J_n(\gamma r)}{J'_n(\gamma a)} \cos n\theta, B_r = -\frac{n}{\gamma r} B_0 \frac{J_n(\gamma r) \sin n\theta}{J'_n(\gamma a)}, B_\theta = -B_0 \frac{J_n(\gamma r)}{J'_n(\gamma a)} \cos n\theta.$$

Здесь a – радиус цилиндрической трубки, $J_n(\gamma r)$ – функция Бесселя.

Штрих обозначает производную по переменной $x = \gamma r$ от функции $J_n(x)$.

Для выполнения граничных условий, а именно того, что компонента $B_r = 0$

при $r=a$ и должна быть конечной при $r=0$, необходимо выбрать такие γ и

n , чтобы при $r=0$ выполнялось условие $\frac{1}{r} J_n(r) = 0$, причём значение γa

должно быть корнем функции Бесселя $J_n(\gamma a)$. Этим двум условиям можно

удовлетворить, используя свойства функций Бесселя, например, при $n=2$ [7].

Таким образом, простейшей равновесной цилиндрической бессиловой конфигурацией является плазменный цилиндр с компонентами магнитного поля

$$B_z = \frac{B_0}{J'_2(\gamma a)} J_2(\gamma r) \cos 2\theta, B_r = -\frac{1}{\gamma r} \frac{B_0 J_2(\gamma r)}{J'_2(\gamma a)} \sin 2\theta, B_\theta = -\frac{B_0 J'_2(\gamma r)}{J'_2(\gamma a)} \cos 2\theta. \quad (4.14)$$

Заметим, что в двухмерной области бессиловой плазменной конфигурации, необходимо выполнить ещё одно условие, при котором циркуляция магнитного поля по контуру, содержащему внутри плазменную конфигурацию, должна быть равна потоку вихря (тока) через этот контур и равна нулю. Для выбранной нами структуры это условие выполняется автоматически. Действительно, с учётом зависимости компоненты магнитного поля B_z от угла θ , получаем

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} (\text{rot} B)_z r d\theta dr = \int_0^a \int_0^{2\pi} \gamma B_z r dr d\theta = 0.$$

Как отметил Паркер [33], если бы это условие не было выполнено, то вне цилиндра существовало бы магнитное поле, оказывающее давление на конфигурацию и приводящее к её деформации. В частном случае осевого течения плазмы вдоль цилиндра со скоростью $V_z = W(r, \theta) \vec{e}_z$, необходимо

удовлетворить условиям (4.11) и (4.13). Условие (4.11) требует, чтобы величина W имела вид $W = f[J_2(\gamma r)\cos 2\theta]$, а из (4.13) получим

$W\text{grad}W = \text{grad}\frac{W^2}{2}$ и $F = \text{const}$. Таким образом, условие разрешимости уравнений интегрируемости выполняется для произвольной функции $W = f[J_2(\gamma r)\cos 2\theta]$.

Из полученного решения следует, что возможно существование большого числа бессиловых магнитных трубок. Они, в частности, генерируются на Солнце.

4.3. Эллипсоид

Рассмотрим теперь более реалистическую плазменную конфигурацию в виде сплющенного эллипсоида, который движется вдоль оси z . Последний получается вращением эллипса с фокальным расстоянием, равным $2a$, вокруг оси z (рис. 4.1). Для рассмотрения геометрии магнитного поля этого эллипсоида удобно использовать эллипсоидальные координаты [7].

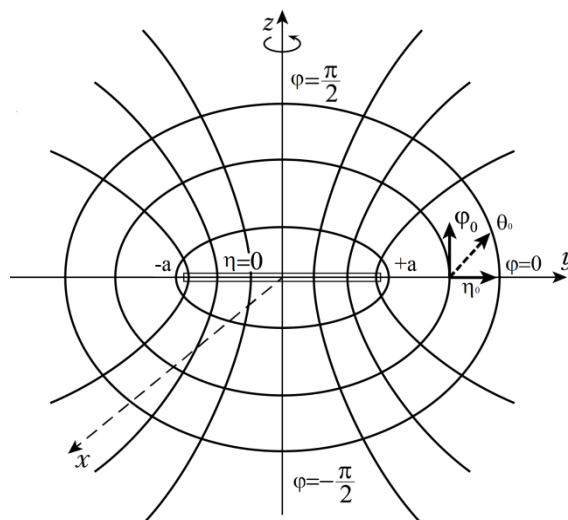


Рис. 4.1. Эллипсоидальные координаты (поперечное сечение).

Стрелкой указано вращение вокруг оси симметрии.

Уравнения, связывающие декартовы координаты с эллипсоидальными координатами $\{\eta, \theta, \phi\}$, имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= ach \eta \cos \varphi \cos \theta = a \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 + \zeta^2} \cos \varphi, \\ y &= ach \eta \cos \theta \sin \varphi = a \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 + \zeta^2} \sin \varphi, \\ z &= ash \eta \sin \theta = a \zeta \mu, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где

$$\zeta = sh \eta, \quad \mu = \sin \theta.$$

Координатные поверхности в этом случае описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \eta = \text{const}, \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2 ch^2 \eta} + \frac{z^2}{a^2 sh^2 \eta} &= 1, \\ \theta = \text{const}, \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2 \cos^2 \theta} - \frac{z^2}{a^2 \sin^2 \theta} &= 1, \\ \varphi = \text{const}, \quad \frac{x}{y} &= \text{tg } \varphi. \end{aligned} \quad (4.16)$$

В (4.16) первая фигура – эллипсоид вращения, вторая – однополостной гиперболоид вращения, а третья – полуплоскости. Коэффициенты Ламе для эллипсоидальных координат имеют вид

$$g_1 = a \sqrt{\frac{\zeta^2 + \mu^2}{1 - \mu^2}}, \quad g_2 = a \sqrt{\frac{\zeta^2 + \mu^2}{1 + \zeta^2}}, \quad g_3 = a \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{\zeta^2 + 1}, \quad (4.17)$$

$$x_1 = \mu, \quad x_2 = \zeta, \quad x_3 = \varphi, \quad 0 < \zeta < x, \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Из (4.2), (4.3) и (4.17), полагая $\gamma = \text{const}$, находим

$$B_1 = \frac{1}{\gamma g_2 g_3} \frac{\partial B_3 g_3}{\partial \zeta} = \frac{1}{\gamma a^2 (\zeta^2 + \mu^2)^{1/2} (1 - \mu^2)^{1/2}} \frac{\partial (B_3 g_3)}{\partial \zeta}, \quad (4.18)$$

$$B_2 = -\frac{1}{\gamma g_1 g_3} \frac{\partial B_3 g_3}{\partial \mu} = \frac{-1}{\gamma a^2 (\zeta^2 + \mu^2)^{1/2} (\zeta^2 + 1)^{1/2}} \frac{\partial (B_3 g_3)}{\partial \mu}, \quad (4.19)$$

$$(1 - \mu^2) \frac{\partial^2 (B_3 g_3)}{\partial \mu^2} + (1 + \zeta^2) \frac{\partial^2 (B_3 g_3)}{\partial \zeta^2} + a^2 \gamma^2 (\zeta^2 + \mu^2) (g_3 B_3) = 0. \quad (4.20)$$

Видно, что компоненты магнитного поля B_1 и B_2 выражаются через компоненту B_3 , поэтому для нахождения общего решения нужно получить

выражение для B_3 . Решение уравнения (4.20) ищем методом разделения переменных [7], для чего положим $B_3 g_3 = \Pi(\mu)Q(\zeta)$, и перепишем его в виде

$$\frac{(1-\mu^2)}{\Pi(\mu)} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu^2} + a^2 \gamma^2 \mu^2 + \frac{(1+\zeta^2)}{Q(\zeta)} \frac{\partial^2 Q}{\partial \zeta^2} + a^2 \gamma^2 \zeta^2 = 0. \quad (4.21)$$

Отсюда, в соответствии с указанным методом, следует

$$(1-\mu^2) \frac{d^2 \Pi}{d\mu^2} + (\beta^2 \mu^2 - n^2) \Pi(\mu) = 0, \quad (4.22)$$

$$(1+\zeta^2) \frac{d^2 Q}{d\zeta^2} + (\beta^2 \zeta^2 + n^2) Q(\zeta) = 0. \quad (4.23)$$

Здесь величина n – постоянная разделения, а $\alpha\gamma = \beta$. Для нахождения аналитического решения выберем такое значение n^2 , чтобы выполнялось условие $n^2 = \beta^2$. В этом случае уравнения (4.22) и (4.23) перепишутся в виде

$$\frac{d^2 \Pi}{d\mu^2} - n^2 \Pi = 0, \quad (4.24)$$

$$\frac{d^2 Q}{d\zeta^2} + n^2 Q = 0. \quad (4.25)$$

Решения уравнений (4.24) и (4.25) имеют вид

$$\Pi_1 = \operatorname{sh} n\mu, \quad Q_1 = \cos n\zeta,$$

и

$$\Pi_2 = \operatorname{ch} n\mu, \quad Q_2 = \sin n\zeta.$$

В результате получаем искомое решение в виде

$$B_3 g_3 = A_1 \sin n\zeta \operatorname{sh} n\mu + A_2 \sin n\zeta \operatorname{ch} n\mu + A_3 \cos n\zeta \operatorname{sh} n\mu + A_4 \cos n\zeta \operatorname{ch} n\mu, \quad (4.27)$$

где $A_1 - A_4$ – некоторые постоянные. Из условия (4.7) следует

$$B_\varphi = \frac{\gamma \chi(\mu, \zeta)}{a \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1+\zeta^2}}. \quad (4.28)$$

С помощью (4.7) и (4.27) получаем выражение для магнитного потока

$$\chi(\mu, \zeta) = c_1 \sin n\zeta \operatorname{sh} n\mu + c_2 \sin n\zeta \operatorname{ch} n\mu + c_3 \cos n\zeta \operatorname{sh} n\mu + c_4 \cos n\zeta \operatorname{ch} n\mu.$$

Здесь введено обозначение $c_i = \gamma A_i$. Простейшим частным решением, удовлетворяющим условиям ограниченности решения при $\mu = \pm 1$ и равенству нулю при $\zeta = 0$ являются следующие решения

$$\begin{aligned} \chi &= c \sin n\zeta \operatorname{shn} - \operatorname{shn} \mu \operatorname{chn} && \text{при } 0 \leq \zeta \leq \zeta_0, 0 \leq \mu \leq 1, \\ \chi &= c \sin \zeta \operatorname{chn} \mu \operatorname{shn} - \operatorname{shn} \mu \operatorname{chn} && \text{при } 0 \leq \zeta < \zeta_0, -1 \leq \mu \leq 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Эти решения описывают бессиловые эллипсоидальные конфигурации типа «летающей тарелки» [23], изображенной на рис. 4.2. При этом значение n можно выбрать произвольным; в частности, как и выше, $n=2$. Более точные решения уравнений (4.22), (4.23) можно получить разложением в ряды.

Из гидродинамики [23, 26, 39] известно, что движение безграничной среды, обусловленное движением сжатого эллипсоида с $\zeta_0 = \pi/n$ со скоростью u параллельно своей оси, описывается выражениями вида

$$\begin{aligned} \varphi &= A\mu(1 - \zeta \operatorname{arctg} \zeta), \\ \psi &= \frac{1}{2} a(1 - \mu^2)(\zeta^2 + 1) \left\{ \frac{\zeta}{\zeta^2 + 1} - \operatorname{arctg} \zeta \right\}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

где

$$A = -\frac{au}{\zeta_0 / (\zeta_0^2 + 1) - \operatorname{arctg} \zeta_0}. \quad (4.31)$$

Здесь φ – потенциал скорости, ψ – функция тока.



Рис.4.2. Бессиловая плазменная конфигурация в виде сжатого эллипсоида вращения, образованного вращением вокруг оси z .

Из полученного решения следует, что если структура образовавшегося КВМ соответствует сжатому плазменному эллипсоиду, то он должен двигаться со скоростью солнечного ветра и обтекаться окружающей плазмой в соответствии с уравнением (4.30). При этом если давление внутри образовавшегося КВМ будет больше, чем давление в обтекающей среде, то он будет расширяться. Это расширение будет тем больше, чем больше будет возрастать скорость солнечного ветра. Внешнее магнитное поле электрическими токами, текущими внутри эллипсоида не вызывается, поскольку в односвязной области линии тока замкнуты (текут в противоположных направлениях), и поэтому интеграл по охватывающему эллипсоид контуру всегда обращается в нуль.

4.4. Плазменный тороид

Рассмотрим теперь наиболее сложную в математическом описании равновесную бессиловую тороидальную магнитоплазменную конфигурацию. Для построения математической модели такой конфигурации будем использовать тороидальную систему координат $\{\eta, \xi, \theta\}$, $0 \leq \eta < \infty$, $0 \leq \xi \leq \pi$ (см. рис. 4.3), а для интерпретации полученных результатов будем использовать квазицилиндрическую систему координат $\{R, z, \theta\}$ (рис. 4.5). В случае, который будет рассмотрен ниже, мы будем считать, что отношение малого радиуса тора a к его большому R_0 мало $\left(\frac{a}{R_0} \ll 1\right)$, эти координаты близки друг к другу. Связь $\{\eta, \xi, \theta\}$ с цилиндрическими координатами $\{R, z, \theta\}$ дается соотношениями

$$R = \frac{R_0 \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta + \cos \xi}, \quad z = \frac{R_0 \sin \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \quad \theta = \theta. \quad (4.32)$$

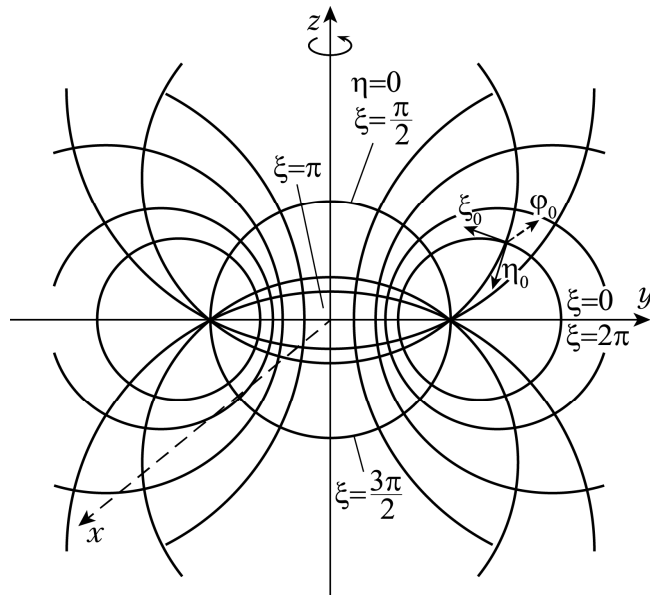


Рис. 4.3. Тороидальная система координат (поперечное сечение).

Стрелкой указано вращение вокруг оси симметрии.

Координатными поверхностями $\{\eta, \xi, \theta\}$ в этом случае являются тор, сфера и плоскость, которые описываются уравнениями (см. рис. 4.4).

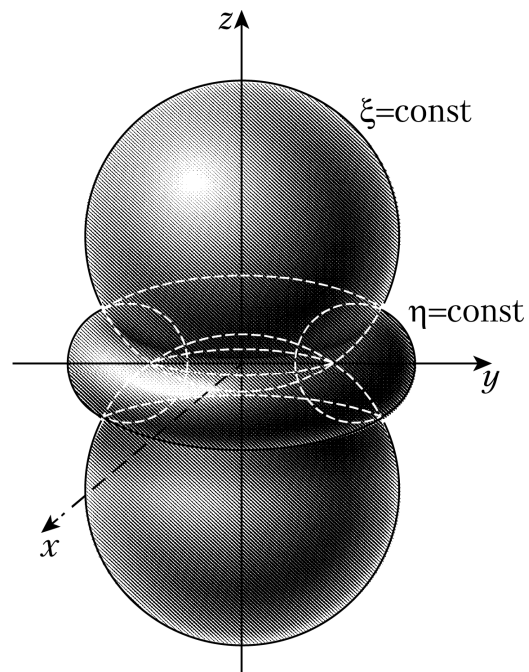


Рис. 4.4. Координатные поверхности тороидальной системы координат.

$$\eta = \text{const}, \quad (R - R_0 \text{cth} \eta)^2 + z^2 = \left(\frac{R_0}{\text{sh} \eta} \right)^2,$$

$$\xi = \text{const} \quad (z - \text{arcctg} \xi)^2 + R^2 = \left(\frac{R_0}{\sin \xi} \right)^2,$$

$$\theta = \text{const}.$$

Далее нас будут интересовать только тороидальные координатные поверхности. Коэффициенты Ламе тороидальных координат равны

$$g_1 = g_2 = \frac{R_0}{\text{ch} \eta + \cos \xi}, \quad g_3 = \frac{R_0 \text{ch} \eta}{\text{ch} \eta + \cos \xi} = R. \quad (4.33)$$

При этом $0 \leq \eta < \infty$, $0 \leq \xi \leq \pi$. Квазицилиндрические координаты $\{R, z, \theta\}$ получаются вращением круга с большим радиусом R_0 вокруг оси z (см. рис. 5). Их связь с цилиндрическими координатами дается формулами

$$R = R_0(1 - \rho \cos \theta), \quad z = r \sin \theta, \quad \theta = \theta, \quad \rho = \frac{r}{R_0} \ll 1.$$

Коэффициенты Ламе в этих координатах имеют вид

$$g_1 = 1, \quad g_2 = r, \quad g_3 = R_0(1 - \rho \cos \theta). \quad (4.34)$$

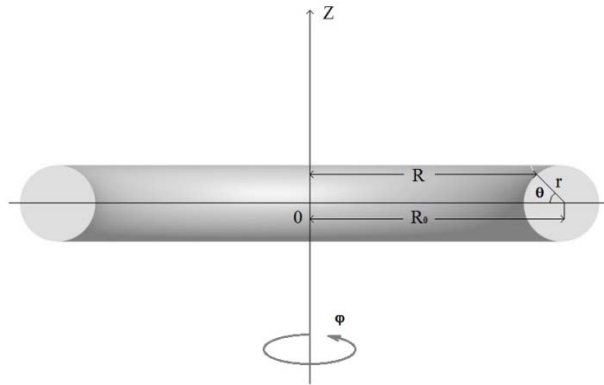


Рис. 4.5. Квазицилиндрическая система координат.

Для аспектного отношения r/R_0 из (4.32) следует $\text{sh} \eta \ll 1$. Поэтому, можно считать, что справедливо неравенство $e^{-\eta} = s \ll 1$. Подставив s в уравнение (4.32), получаем

$$R \approx R_0(1 + 2s \cos \xi), \quad z \approx 2s \sin \xi. \quad (4.35)$$

Сравнивая (4.35) с (4.34), находим, что

$$s = \frac{r}{2R_0}, \quad s_0 = \frac{a}{2R_0}. \quad (4.36)$$

Здесь a – малый радиус поперечного сечения тора.

Далее, в соответствии с подходом, изложенным в подразделе 4.1, ограничимся рассмотрением тора с осевой симметрией, для которого $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$. Уравнения (4.2) и (4.3) в тороидальной системе координат имеют вид

$$\frac{1}{2R_0^2 s (1 - 2s \cos \xi)} \frac{\partial B_\theta g_3}{\partial \eta} = \gamma B, \quad \frac{1}{2s R_0^2 (1 - 2s \cos \xi)} \frac{\partial B_\theta g_3}{\partial \xi} = -\gamma B_\eta, \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{\gamma R_0 (1 - 2s \cos \xi)} \frac{\partial (B_\theta g_3)}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{\gamma R_0 (1 - 2s \cos \xi)} \frac{\partial (B_\theta g_3)}{\partial \eta} \right] = \quad (4.38)$$

$$= -\gamma s^2 R_0 (1 - 2 \cos \xi) (B_\theta - g_3),$$

$$g_1 \approx 2R_0 s (1 - 2s \cos \xi) = g_2, \quad g_3 = R_0 (1 - 2s \cos \xi). \quad (4.39)$$

Положим $\gamma = \gamma_0 = \text{const}$ и учтем, что $\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \eta} = -s \frac{\partial}{\partial s}$. В результате

уравнение (4.38) можно переписать в виде

$$s^2 \frac{\partial^2 (B_\theta g_3)}{\partial s^2} + s(1 + 2s \cos \xi) \frac{\partial B_\theta g_3}{\partial s} + \frac{\partial^2 (B_\theta g_3)}{\partial \xi^2} - 2s \sin \xi \frac{\partial B_\theta g_3}{\partial \xi} + \quad (4.40)$$

$$+ 4\gamma_0^2 R_0^2 s^2 (1 - 2s \cos \xi) B_\theta g_3 = 0.$$

Здесь использованы следующие выражения для компонент магнитного поля

$$B_\theta g_3 = \gamma_0 \chi(\xi, \eta), \quad B_\eta \approx \frac{\gamma_0}{2s R_0^2} \frac{\partial \chi}{\partial \xi}, \quad B_\xi \approx \frac{\gamma_0}{2R_0^2 (1 + 4s \cos \xi)} \frac{\partial \chi}{\partial s}. \quad (4.41)$$

Уравнение (4.40) является исходным для нахождения равновесной тороидальной бессиловой конфигурации. Решение (4.40) ищем в виде ряда

$$\chi = f_0(s) + f_1(s) \cos \xi + \dots \quad (4.42)$$

Функции $f_0(s)$ и $f_1(s)$, в свою очередь, разлагаем в степенные ряды

$$f_0(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n, \quad f_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n s^n. \quad (4.43)$$

Из (4.40), (4.41) следует, что коэффициенты a_1 и b_1 в указанных рядах отсутствуют, поскольку в противоположном случае компонента магнитного

поля B_η не будет зависеть от радиуса тора r и поэтому нельзя будет удовлетворить граничным условиям при $s = 0$. При подстановке (4.42), (4.43) в (4.40) прямыми расчетами убеждаемся, что коэффициент b_2 по той же самой причине также должно обращаться в нуль. В результате функция $\chi(s, \xi)$ должна иметь следующий вид

$$\chi(s, \xi) = a_0 + a_2 s^2 + b_3 s^3 \cos \xi + \dots \quad (4.44)$$

Подставляя (4.44) в (4.40), находим a_2 , b_3

$$a_2 = -\gamma_0^2 R_0^2 a_0, \quad b_3 = \frac{3}{2} \gamma_0^2 R_0^2 a_0. \quad (4.45)$$

Таким образом, с рассматриваемой точностью функцию $\chi(s, \xi)$ можно записать в виде

$$\chi(s, \xi) = a_0 - \gamma_0^2 R_0^2 a_0 s^2 + \frac{3}{2} \gamma_0^2 R_0^2 a_0 \cos \xi + \dots \quad (4.46)$$

Для определения граничной поверхности здесь учтено

$$s = s_0 (1 + s_1 \cos \xi). \quad (4.47)$$

Подставим (4.47) в (4.46), учитывая, что на границе плазмы $\chi = \text{const}$.

Отсюда следует

$$s_1 = \frac{3}{4} s_0.$$

Следовательно, уравнение граничной поверхности имеет вид

$$s = s_0 \left(1 + \frac{3}{4} s_0 \cos \alpha \right). \quad (4.48)$$

В квазицилиндрической системе координат выражение (4.48) принимает вид

$$r = a \left(1 + \frac{3}{8} \frac{a}{R_0} \cos \xi \right). \quad (4.49)$$

и описывает круг радиуса a со смещенным центром на величину $\frac{3}{8} \frac{a^2}{R_0}$.

Нетрудно убедиться прямыми расчётами, что справедливо условие $\iint (\text{rot} \vec{B})_3 g_1 d\xi g_2 d\eta = 0$. Это означает, как и ранее, что в

рассматриваемых магнитных конфигурациях магнитное поле вне тороида отсутствует.

В рамках рассматриваемого приближения внешняя задача потенциального обтекания тора $\text{rot}\vec{V} = 0$, $\text{rot}\vec{B} = 0$ определяется по формуле для функции тока $\psi(\xi, \eta)$ [23, 26]:

$$\psi = -\frac{1}{2}uR_0^2(1 - 4s \cos \xi) + \frac{\Gamma}{2\pi}R_0(1 - s \cos \xi)\left(\ln \frac{4}{s} - 2\right) + \frac{N}{s} \cos \xi. \quad (4.50)$$

Здесь u – скорость движения тора, Γ – циркуляция. Постоянная N определяется из граничного условия $\psi = \text{const}$. Подставляя (4.48) в (4.50) и учитывая, что $\Gamma=0$ вследствие равенства нулю тороидальной компоненты вихря скорости в рассматриваемой конфигурации, получим

$$N = \frac{32}{3}uR_0^2s_0^2, \quad \psi = -\frac{1}{2}uR_0^2(1 - 4s \cos \xi) + \frac{32}{3}uR_0^2s_0^2. \quad (4.51)$$

Из полученного решения (4.51) следует, что равновесие бессилового плазменного тора в окружающей плазменной среде может иметь место только при движении тора в направлении его оси со скоростью u . В противоположном случае, ввиду того, что магнитные силовые линии сгущаются на внутренней стороне тора, он должен расширяться. Набегающий поток, обтекающий тор, имеет скорость внутри большую, чем на внешней стороне, поэтому давление по закону Бернулли внутри будет меньше, а на внешней стороне тора больше. Таким образом, внешнее гидродинамическое давление уравнивает возникающую разность магнитных давлений.

Необходимо заметить, что идентификация структуры бессиловых конфигураций с помощью внешних наблюдений ввиду многократного изменения направления магнитных силовых линий и линий электрического тока, очень затруднена.

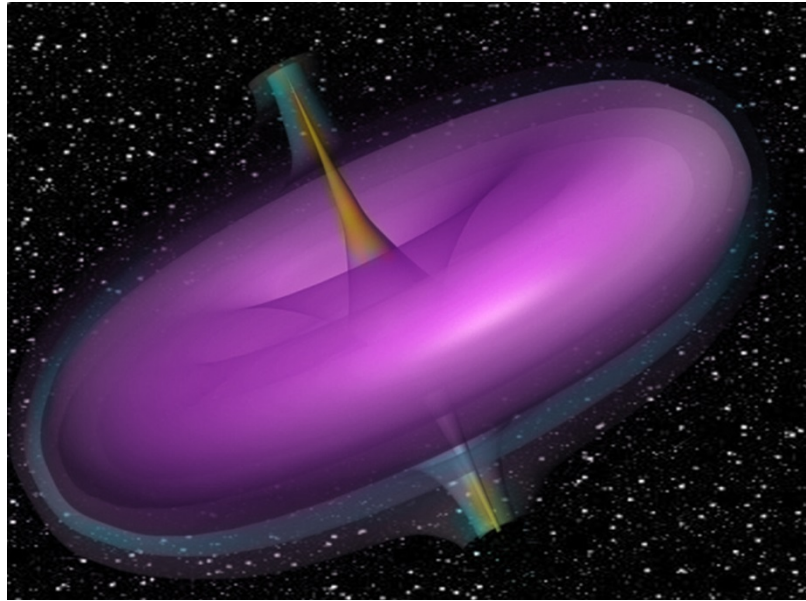


Рис.4.6. Бессиловая плазменная конфигурация в виде тора, образованного вращением вокруг оси z .

4.5 Выводы к разделу

1. Получена система самосогласованных магнитогиродинамических уравнений (4.3), (4.11) и (4.12) для описания бессиловых осесимметричных конфигураций с плазмой, которая стационарно движется как в середине, так и вне структуры. Установлено условие (4.13) существования решений полученных уравнений в предположении, что плазму можно считать идеальным газом, для которого можно ввести функцию давления $P = \int dp/\rho$.

2. Найдено решение (4.14) для магнитной плазменной конфигурации в виде цилиндрической трубки. Показано, что в этой конфигурации циркуляция магнитного поля по контуру, который содержит внутри себя указанную конфигурацию, равняется потоку вихря через этот контур и равняется нулю. Отмечается, что если бы это условие было не выполнено, то вне цилиндра существовало бы магнитное поле, приводящее к деформации цилиндрической трубки.

3. Получено аналитическое решение (4.29) типа «летающей тарелки» для более реалистичной плазменной конфигурации в виде сжатого эллипсоида.

Приведено выражение для потенциальной скорости и функции тока в предположении, что эллипсоид движется со скоростью потока плазмы. Отмечено, что если давление в нем будет больше, чем давление в окружающей среде, то он будет расширяться. Это расширение увеличивается при увеличении скорости потока плазмы. Показано, что токи, протекающие внутри эллипсоида, не генерируют внешнее магнитное поле.

4. Рассмотрено движение магнитоплазменной конфигурации в виде тора. Из полученного решения (4.46) следует, что равновесие бессилового плазменного тора в окружающем плазменном потоке может иметь место при движении тора в направлении потока. В противоположном случае тор будет расширяться.

5. Исследованные плазменные структуры, самосогласованно движущиеся в потоке солнечного ветра, могут приводить к генерации геомагнитных бурь, поскольку могут содержать южную компоненту магнитного поля.

РАЗДЕЛ 5. ВАРИАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ГЕОМАГНИТНЫХ ИНДЕКСОВ*

Как отмечалось в Разделе 1 процессы транспорта энергии от Солнца к магнитосфере и ионосфере Земли могут сопровождаться их существенным влиянием на космические, биологические и технологические системы [4, 21, 22, 64, 68, 96, 202]. Основные факторы такого влияния изучаются в рамках проблемы «космическая погода» [8, 21, 119, 153]. Обычно влияние Солнца на Землю и околоземное космическое пространство характеризуется геомагнитными индексами, которые описывают лишь часть сложной картины солнечно-земных связей. Выбор конкретного индекса и его сопоставление с определенным физическим процессом в околоземной плазме является нелегкой задачей и требует серьезного предварительного исследования [59, 91, 108, 109, 149]. Поэтому необходимой составляющей исследования космической погоды является прогнозирование поведения показателей геомагнитной активности (Kp-индекс, Ap-индекс, Dst-индекс и др.). В данном разделе основное внимание уделено прогнозированию поведения Dst-индекса с помощью методов физической кибернетики.

5.1. Прогнозирование динамики Dst-индекса на основе билинейной модели

Для решения задачи прогнозирования динамики Dst-индекса предлагается использовать билинейные динамические модели, которые получаются путём упрощения более сложных нелинейных моделей (см. подраздел 2.4). Тогда процедура идентификации нелинейной модели делается в предположении, что она является билинейной. При таком подходе

* Результаты данного раздела изложены в работах [2^a, 4^a, 8^a, 10^a, 12^a, 13^a] и в докладах [14^a, 17^a, 18^a]

основное внимание уделяется глобальным динамическим и информационным характеристикам солнечного ветра и магнитосферы, что существенно отличает предложенный метод от часто используемых статистических подходов. Для используемого динамического подхода в качестве входных данных используются параметры солнечного ветра, а в качестве выходных – геомагнитные индексы [59, 65, 71–74, 127, 133, 134, 149, 194, 195]. Из общих соображений понятно, что использование многомерных временных рядов, которые содержат много входных параметров и характеризуют поведение солнечного ветра, приведет к значительному усложнению модели и тем самым осложнит решение задачи прогнозирования [101].

Билинейная динамическая модель Dst-индекса имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax + \sum_{i=1}^m B_i x(t) u_i(t), \\ y(t) &= Dx(t), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где A, B_i – постоянные матрицы размера $n \times n$, $n \times n$ соответственно, $x(t)$ – вектор состояния размерности n , $u(t)$ – вектор входных воздействий, компоненты которого $u_i(t)$ представляют собой скалярные функции времени (параметры солнечного ветра), $y(t)$ – скалярная функция выходных переменных, зависящая от времени и представляющая в рассматриваемой проблеме Dst-индекс, D – постоянная матрица размера $n \times 1$. Размерность вектора $x(t)$ определяется на основании известного алгоритма Такенса [23,113].

Пусть z – вектор, состоящий из элементов матрицы $F = [A, B_i, D]$. Тогда задача определения параметров матриц A, B_i, D с учетом физических ограничений на параметры матрицы F сводится к решению такой задачи математического программирования

$$\underset{z}{\text{minimize}} \quad v(z) = \prod_{i=1}^m f_i(z) \quad (5.2)$$

где $v(z)$ – интегральная ошибка прогнозирования, f_1, \dots, f_m – функционалы, задающие погрешность прогнозирования на $1, \dots, m$ часов вперед. В рамках задачи (5.2) были исследованы условия существования глобального минимума функционала погрешности и построен алгоритм решения задачи.

Для упрощения задачи прогнозирования динамики Dst-индекса будем рассматривать магнитосферу как "черный ящик" с одним входом и одним выходом [143, 174, 175]. Описание нелинейных процессов в таком "ящике" может быть улучшено за счет введения в модель нескольких свободных параметров и шума. Как показали численные расчеты, выбор в качестве входа модели параметра VB_z позволяет разработать достаточно адекватную прогнозную модель [4]. Следуя [4], будем описывать динамику Dst-индекса

$$\begin{aligned} \text{Dst}(t) &= \sum_{j=0}^M b_j VB_z(t - j\Delta t), \\ \dot{\text{Dst}}(t) + \text{Dst} / \tau &= b VB_z. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Точка сверху обозначает производную по времени. Указанные уравнения позволяют повысить точность прогнозирования Dst-индекса.

Для выбора структуры билинейной модели и определения оптимального количества слагаемых в ней на первом этапе использовались "обучающие" временные ряды, полученные за период с 1983 по 2004 год. Качество прогнозирования в рамках полученных моделей проверялась на новых независимых тестовых данных [69]. На рис. 5.1 приведен один из результатов сравнения линейной и билинейной моделей, когда в последней входные параметры солнечного ветра (скорость солнечного ветра и южная компонента магнитного поля) брались по отдельности и в виде произведения. Как видно из графика, наименьшую ошибку прогноза обеспечивает билинейная дискретная динамическая модель с входным параметром vB_z .

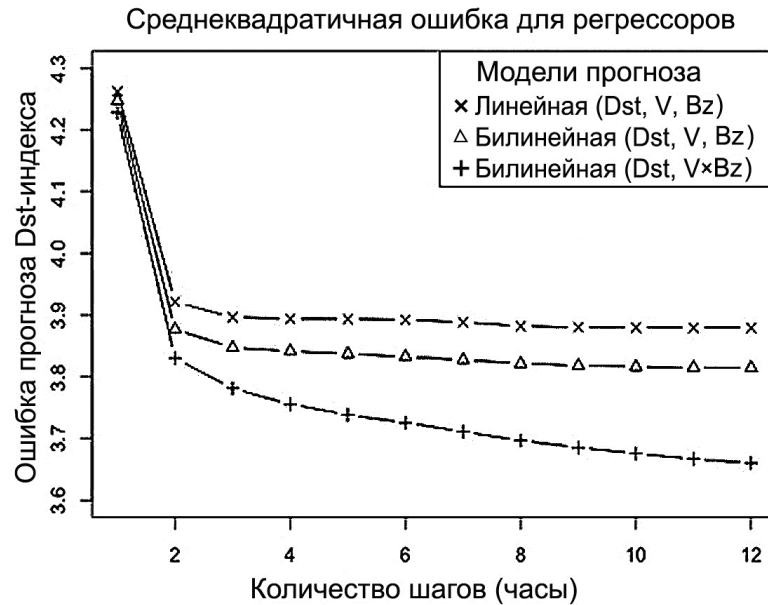


Рисунок 5.1. Анализ ошибок прогноза в зависимости от структуры модели.

Как пример полученной одномерной дискретной билинейной модели приведем следующее уравнение

$$\begin{aligned}
 y(k) = & a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + a_3 y(k-3) + a_4 y(k-4) + a_5 y(k-5) + \\
 & a_6 u(k) + a_7 u(k-1) + a_8 u(k-2) + a_9 u(k-3) + a_{10} u(k-4) + a_{11} u(k-5) + \\
 & a_{12} u(k-6) + a_{13} y(k-5) \cdot u(k-5) + a_{14} y(k-3) \cdot u(k-5).
 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь величина y соответствует Dst-индексу, а u – произведению VB_z , k – дискретный момент времени k . Это уравнение, как и ожидалось в соответствии с изложенным подходом, обеспечило минимальную ошибку прогнозирования

На рисунке 5.2 приведены результаты прогнозирования Dst-индекса на основе уравнения (5.4) на один час вперед.

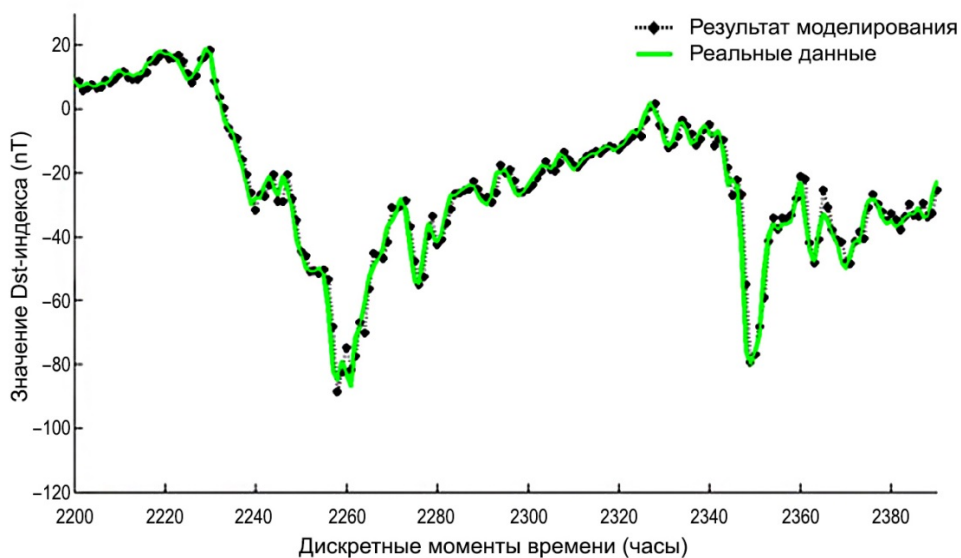


Рисунок 5.2. Прогнозирование значения Dst-индекса на один час вперед.

Видно, что имеет место хорошее соответствие результатов прогноза и реально наблюдаемых данных. Этот результат приводит к выводу о целесообразности прогнозирования Dst-индекса во времени на основе билинейной модели.

На Рис. 5.3 приведены результаты сравнения линейного прогнозирования Dst-индекса на один час вперед с экспериментальными данными.

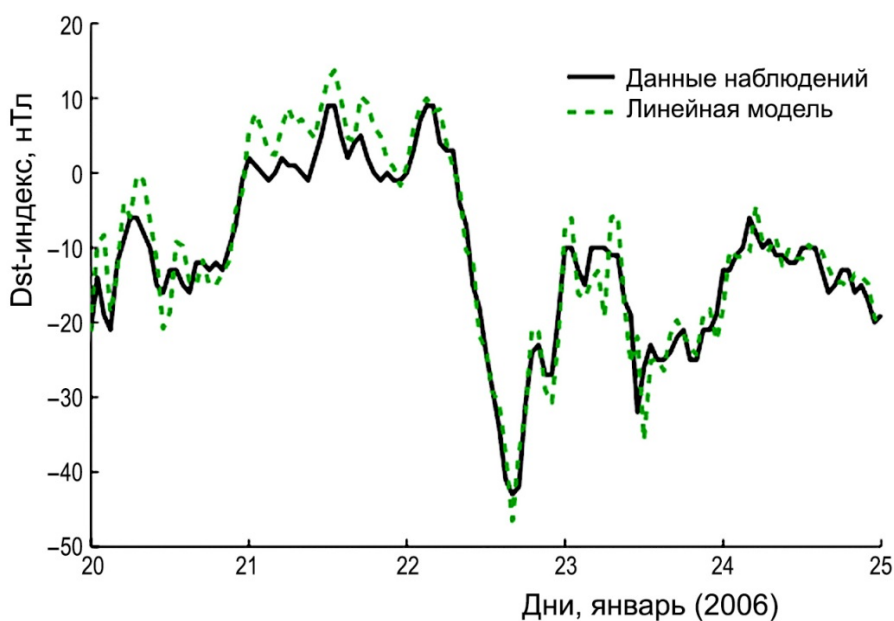


Рисунок 5.3 – Линейное прогнозирование Dst-индекса.

Из рисунка видно, что линейная модель прогнозирует поведение Dst-индекса с большей погрешностью, чем билинейная.

5.2. Алгоритмы прогнозирования Dst-индекса

В данном подразделе будут описаны алгоритмы прогнозирования Dst-индекса на основе базы данных OMNI2 Database (<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/omniweb>). Перед идентификацией модели по набору данных за 1991 – 2009 гг. применена процедура восстановления пропущенных наблюдений. Для прогнозирования Dst-индекса использовались спутниковые данные наблюдений параметров солнечного ветра и билинейная динамическая модель системы «солнечный ветер – магнитосфера». Методическая основа этих исследований была изложена в работах [11^a, 12^a].

Для сравнения с альтернативными моделями прогнозирования было рассмотрено нелинейную модель авторегрессии с экзогенными (равноправными) входами (NARX-модель), являющуюся отдельным случаем более общих структур, содержащих компоненты переменного среднего и известных как NARMAX-модели [67]. Они характеризуются большей гибкостью и потенциально более высокой точностью. Теоретически прогнозирующая NARMAX-модель может быть построена на основе обыкновенного многослойного персептрона, охваченного обратной связью. Обучение такой системы характеризуется низкой скоростью сходимости, необходимостью использования настройки по эпохам и невозможностью работы с нестационарными сигналами. Для сравнения с NARMAX-моделями разработано программное обеспечение, структура которого представлена на рис. 5.4.



Рисунок 5.4. Структура программного обеспечения.

На первом этапе проводится формирование обучающего набора данных, который разбивается на три группы: первая – учебная выборка, вторая – тестовая выборка и третья – экзаменационная выборка. Сперва проводится отбор наиболее весомых регрессоров. На их основе проводится поиск структуры и параметров модели с учетом ряда ограничений, после чего проверяется адекватность модели на тестовой и экзаменационных выборках. Структуру модели, а также ее параметры найдено на основе решения нелинейной задачи математического программирования с ограничениями.

Для перебора возможных структур модели использован метод генетического программирования (ГП). Алгоритм ГП, схема работы которого представлена на рис. 5.5, в отличие от обычных оптимизационных методов, позволяет проводить символьную оптимизацию и представлять потенциальные решения в виде структурно-упорядоченных символов.

С помощью генетического алгоритма для решения поставленной задачи выполняется определенная последовательность процедур. Сначала производится кодирование задачи. После этого случайным образом создается

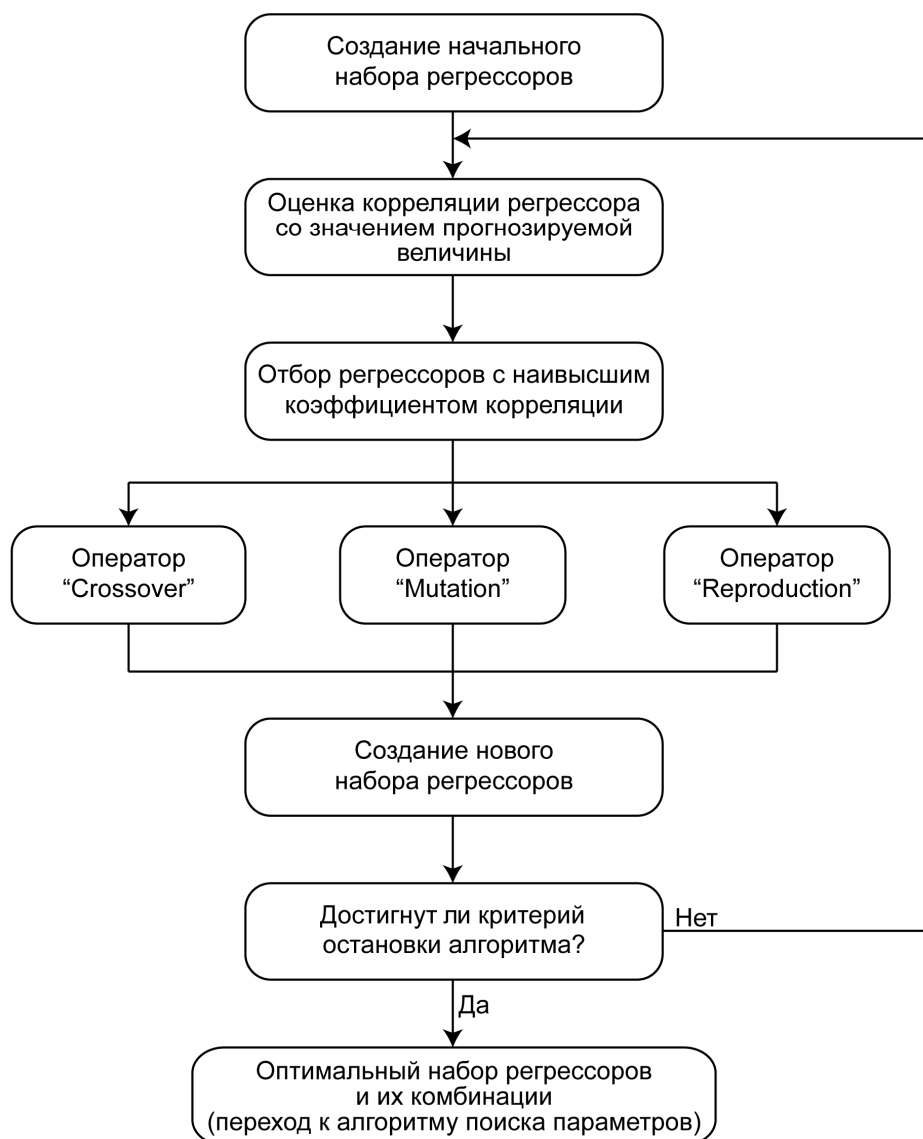


Рисунок 5.5. Структурная схема генетического алгоритма.

некоторое количество начальных элементов (регрессоров) – начальная популяция. Затем производится оценка пригодности регрессоров для идентификации модели с применением функции приспособления, в результате которой каждому регрессору присваивается определенное значение приспособленности. После этого осуществляется отбор наиболее пригодных регрессоров, так называемая операция «селекция». На основании применения «генетических операторов» (оператор скрещивания (Crossover), оператор мутации (Mutation) и оператор воспроизведения (Reproduction)) создается следующий набор регрессоров. Регрессоры так называемого «следующего поколения» также оцениваются с применением генетических

операторов. Таким образом, моделируется эволюционный процесс, длящийся, пока не будет выполнен один из следующих критериев остановки алгоритма:

- нахождение оптимального решения;
- достижение конечного числа итераций;
- достижение конечного значения времени поиска.

На основе изложенных выше алгоритмов построены модели прогнозирования динамики Dst-индекса. При моделировании использовались спутниковые данные, полученные с интервалом 1 час. Установлено, что получающиеся модели обеспечивают достаточно точный прогноз на несколько часов, что дает возможность практического использования их для прогнозирования Dst-индекса. После тестирования алгоритмов осуществлен поиск модели прогнозирования Dst-индекса на один час (см. рис. 5.2). Установлено, что точность прогноза может быть повышена с помощью алгоритма адаптации параметров модели в реальном времени.

5.3. Анализ прогнозируемости Dst-индекса на основе локальных показателей Ляпунова

Анализ нелинейной динамики систем играет важную роль в физических науках, например, в теории турбулентности [198–202]. Хаос в системах с небольшим числом переменных был обнаружен в различных природных и технических системах, например, в магнитосфере Земли, ответственной за космическую погоду, сигналах ЭЭГ во время сна, или сердечнососудистой системе и т.д. [92, 122–126, 129, 151, 154, 156, 157, 160, 161, 170, 177–179].

Важными характеристиками поведения систем с нелинейной динамикой являются показатели Ляпунова. Они представляют собой мощный инструмент для анализа сложного поведения систем. В настоящее

время показатели Ляпунова широко используются для описания динамики сложных систем с сосредоточенными и распределенными параметрами.

Одно из наиболее важных приложений показателей Ляпунова – это их использование для обнаружения качественных изменений в динамике системы при изменении управляющих параметров. Например, показатели Ляпунова используются для обнаружения перехода от хаотического режима в системе к гиперхаосу в ней, для выявления наличия гиперболического аттрактора, для диагностики различных типов хаотической синхронизации. Наряду с глобальными показателями Ляпунова иногда в рассмотрение вводят локальные показатели, которые рассчитываются *на конечном интервале времени*. Такие показатели можно использовать, например, при анализе экспериментальных данных, когда в распоряжении исследователей находятся ограниченные временные реализации (ряды). Локальные показатели Ляпунова могут также характеризовать особенности фазового пространства рассматриваемых систем или характерные черты поведения систем, которые проявляются в различные моменты времени. В частности, локальные показатели Ляпунова использованы для объяснения поведения первого показателя Ляпунова вблизи границы фазовой хаотической синхронизации. В диссертационной работе локальные показатели Ляпунова использовались для расчета горизонта прогнозирования,

Известно, что в двух связанных хаотических системах при изменении параметра связи, как правило, происходит последовательный переход в область отрицательных значений двух показателей Ляпунова. Изменение знака показателя Ляпунова, как отмечено выше, свидетельствует о качественных изменениях, произошедших в динамике системы. В ряде случаев переход одного из показателей Ляпунова в область отрицательных значений связывают с возникновением синхронного поведения, как, например, в случае синхронизации периодических колебаний или при установлении режимов фазовой и обобщенной синхронизации. В то же самое время для связанных хаотических осцилляторов при установлении режима

фазовой синхронизации условный первый показатель Ляпунова является уже существенно отрицательным. Переход старшего показателя Ляпунова через нуль происходит также немного раньше установления режима обобщенной хаотической синхронизации.

Одной из важных характеристик временных рядов в системах с нелинейной динамикой, является величина корреляционной размерности d . Поясним важность этой величины. Допустим, что у нас есть скалярный временной ряд x_1, x_2, \dots, x_{N_f} . Используя этот ряд, введем в рассмотрение новые координаты состояния системы, взятые через некоторый интервал времени τ

$$V_n = (x_n, x_{n-\tau}, \dots, x_{n-(d-1)\tau}), \quad (5.5)$$

где τ – временная задержка, d – размерность вложения аттрактора. Тогда согласно теореме вложения Уитни в общем случае существует функция F такая, что справедливо уравнение

$$x_{n+1} = F(V_n), \quad (5.6)$$

если d достаточно велико. Тогда возникает вопрос о том, каким образом выбрать τ и d , т.е. временную задержку и размерность вложения так, чтобы уравнение (5.6) выполнялось. На практике размерности вложения d численно находились так, чтобы ошибка прогнозирования была минимальной. Следуя работам Грассбергера и Прокаччиа [113], корреляционная размерность аттрактора можно определить из экспериментальных данных.

Нелинейный анализ Dst-индекса проводился на основе реконструкции динамических моделей по экспериментальным измерениям эволюции Dst-индекса. Под термином «реконструкция» в широком смысле обычно понимается процедура получения нелинейного дифференциального уравнения, описывающего изменение Dst-индекса во времени. Если уравнение по тем или иным причинам получить затруднительно, то «реконструкция» производится в узком смысле, когда определяются некоторые динамические и информационные характеристики поведения Dst-

индекса (например, корреляционная размерность, характеристический показатель Ляпунова и т.д.).

Проведённые исследования [8^a, 203] показали, что для Dst-индекса возможны как положительные, так и отрицательные значения первого показателя Ляпунова, что свидетельствует (при положительном значении первого показателя Ляпунова) о хаотическом поведении Dst-индекса. Этот вопрос не освещён в научной литературе по проблеме космической погоды и фактически является не изученным. Обратим внимание, что прогноз поведения хаотического поведения Dst-индекса – это актуальная, но мало изученная проблема [8^a]. По определению, хаотические системы отражают чувствительность решений к изменению начальных условий: две близкие в начальный момент времени траектории могут экспоненциально расходиться в фазовом пространстве со скоростью, определяемой наибольшим показателем Ляпунова [57, 97]. Эта проблема является актуальной в теории

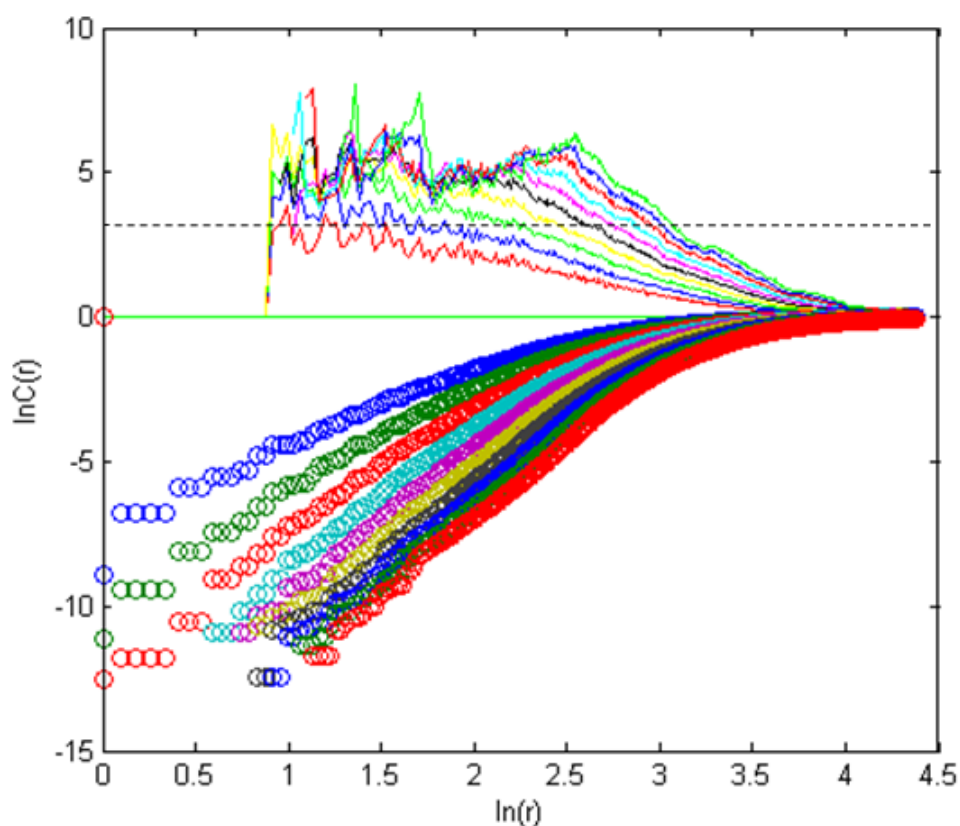


Рисунок 5.7. Комбинация двух графиков: кружочками показана зависимость корреляционной функции от расстояния между точками r ; линиями показаны производные этой функции.

турбулентности и частично исследована в работах Рюэля-Такенса [23]. Из этих работ известно, что если начальное возмущение изменяется на величину δ и допустимая ошибка Δ является малой, то наибольший показатель Ляпунова λ_1 дает грубую оценку времени прогнозирования T_p в виде соотношения $T_p = \frac{1}{\lambda_1} \ln\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)$. Полученное соотношение отвечает на вопрос: как далеко мы можем сделать прогноз по времени.

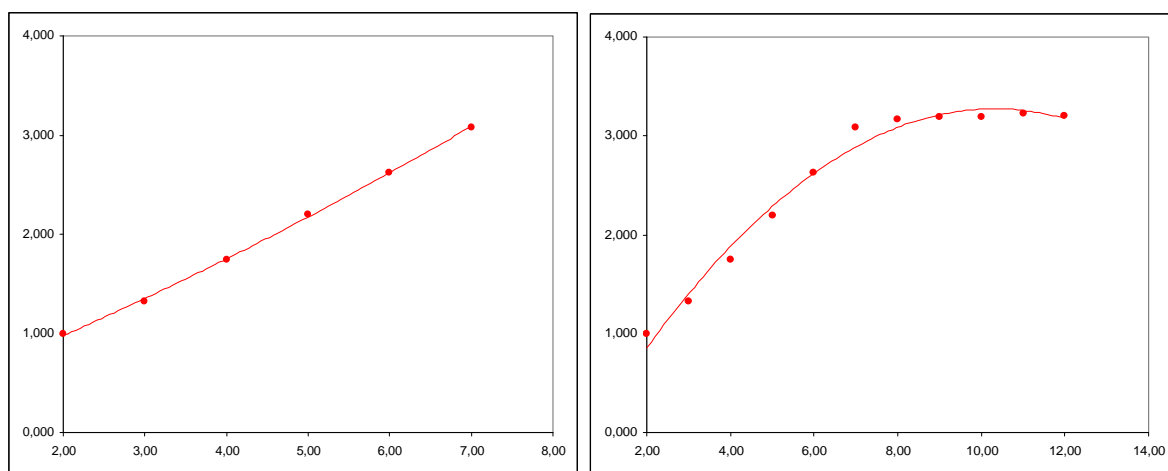


Рисунок 5.8. Зависимость размерности d от числа фазовых переменных n .

5.4. Гарантированное прогнозирование Dst-индекса

Одной из новых идей в физической кибернетике является идея использования адаптивной динамической модели и робастного управления для прогнозирования геомагнитных индексов. Под робастным управлением обычно понимают совокупность методов, целью которых является синтез такого регулятора, который обеспечивал бы хорошее качество управления (к примеру, запаса устойчивости системы), если модель прогнозирования отличается от расчётной или математическая модель неизвестна. Таким образом, *робастность* фактически означает малое изменение выхода модели с регулятором при малом изменении параметров объекта управления. Системы, обладающие свойством робастности, называются робастными (грубыми) системами. Обычно робастные контроллеры применяются для

управления объектами с неизвестной или неполной математической моделью, и содержащими неопределённости.

Во многих задачах прогнозирования космической погоды приходится оценивать параметры динамических моделей и сигналы по зашумлённым приборным измерениям. В частности, для решения задач прогнозирования геомагнитных индексов было предложено использовать комбинацию цифрового фильтра и билинейной системы. Для расчета динамических свойств моделей, часто необходимо оценивать сигналы на их входе привлекая теорию фильтрации. В рамках теории фильтрации задача сводится к синтезу фильтра на основе имеющихся априорных сведений об оцениваемом сигнале и шуме, а также выбранном критерии оптимальности.

Важной задачей является оценивание геомагнитных индексов, когда в измерениях $y(t) = s(t) + n(t)$, полезный сигнал $s(t)$ и шум измерения $n(t)$ предполагаются некоррелированными между собой стационарными в широком смысле центрированными случайными процессами. Для описания сигнала и шума используются стохастические модели (спектральные плотности или корреляционные функции) и сведения о законах распределения сигнала и шума не привлекаются. В связи с этим для получения оценки используется линейный фильтр. Полагается, что существует установившееся решение задачи фильтрации, означающее, что ошибка оценивания $e(t) = y(t) - s(t)$, где $s(t)$ - оценка сигнала, является стационарным процессом.

При точном знании структуры и параметров моделей оцениваемого сигнала и шума для решения задачи оценивания используются методы оптимальной линейной фильтрации, когда минимизируется среднеквадратическая ошибка. При этом фильтр может быть синтезирован как в частотной (фильтр Винера), так и во временной (фильтр Калмана) областях. Отметим, что, учитывая центрированность ошибки линейного

фильтра при центрированных сигнале и шуме, минимизация среднего квадрата ошибки равносильна минимизации ее дисперсии.

В прикладных задачах космической погоды часто возникает ситуация, когда отсутствует точная информация о структуре или параметрах моделей оцениваемого сигнала и шума. В таких случаях применение оптимального фильтра нередко приводит не только к отличию ожидаемых точностей от их реальных значений, но и к расходимости процесса фильтрации, когда ошибка фильтрации неограниченно возрастает.

Для преодоления этой проблемы фильтр синтезируют таким образом, чтобы обеспечить приемлемое качество его работы в условиях отличия действительных характеристик сигнала и шума от расчетных. Такие фильтры получили название *робастных* фильтров. Построению робастных алгоритмов для оценивания сигналов посвящено большое число работ, и по сей день эта область активно развивается. Отметим лишь некоторых из отечественных ученых: В.М. Кунцевича, А.Б. Куржанского, Я.З.Цыпкина, Ф.Л. Черноусысо, А.Е. Барабанова, В.А.Бесекерского, А.В. Небылова, И.Б. Челпанова, Б.Т.Поляка, Е.Н. Розенвассера, которые внесли существенный вклад в развитие теории робастного оценивания.

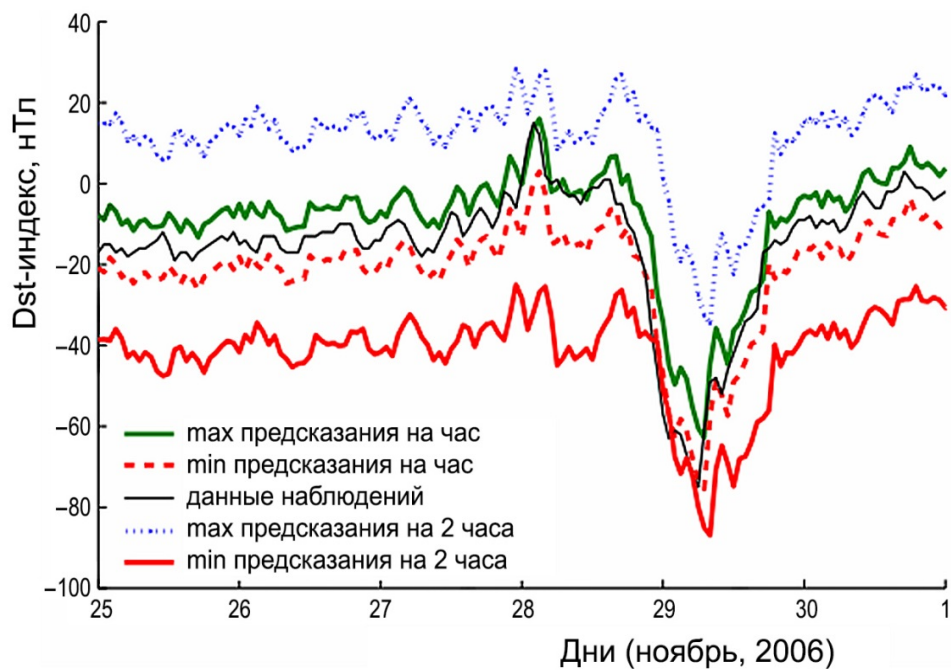
Среди всех робастных фильтров особый класс образуют *гарантирующие фильтры*, которые строятся из условия не превышения некоторой оценки сверху для дисперсии ошибки фильтрации при заданной неопределенности в модели и могут рассматриваться как обобщение стандартного оптимального фильтра на случай неопределенности в системе. Среди гарантирующих фильтров широкое распространение получил *минимаксный* подход.

Многие исследования посвящены построению гарантирующего фильтра с использованием аппарата фильтрации во временной области, когда существуют неопределенности матрицы динамики или интенсивностей шумов в описании формирующего фильтра для оцениваемого сигнала.

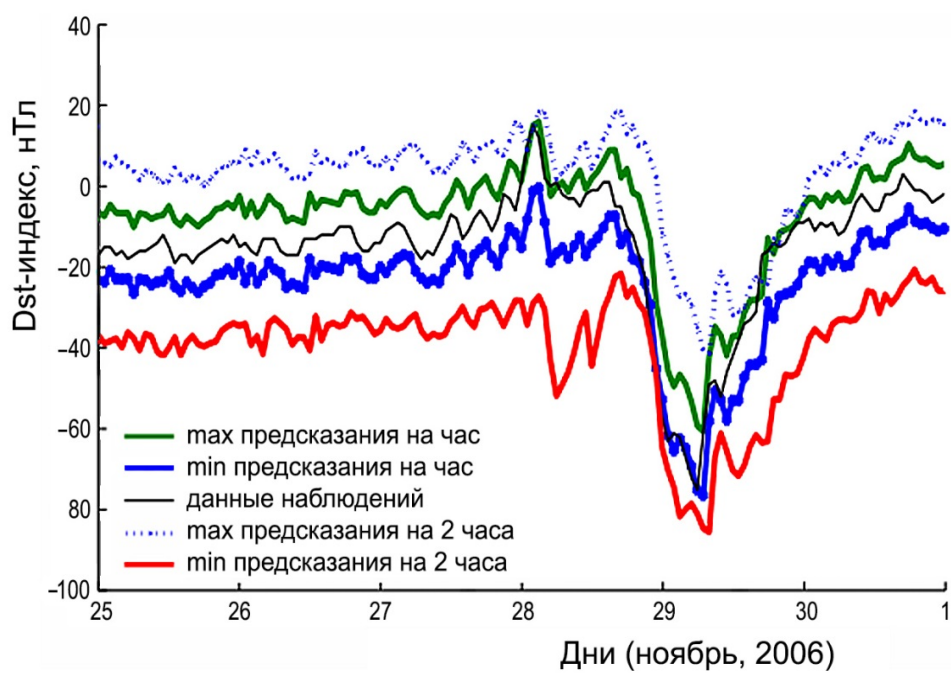
Гарантированного оценивания можно также достигнуть путем настройки фильтра на нестационарные модели, представляемые в виде n -кратно проинтегрированного белого шума. При этом обеспечивается стабильная работа фильтров при кусочно-постоянном поведении реальных процессов, а ошибка фильтрации для стационарных процессов не превысит заранее известного уровня. Предложен также способ задания модели сигнала в виде n -кратно проинтегрированного белого шума путем спрямления некоторой выбранной спектральной плотности полезного сигнала в точке ее пересечения со спектральной плотностью шума.

Большой интерес вызывают НТ-фильтры, которые минимизируют максимальный пик спектральной плотности ошибки. Исследования показали, что такие фильтры являются малочувствительными в смысле точности оценивания к отличию действительных характеристик сигнала и шума от расчетных. Более того, такие фильтры могут быть обобщены на случай неопределенности в модели.

При решении ряда прикладных задач обработки результатов измерения геомагнитных индексов часто возникает необходимость в получении оценок амплитуды, частоты и, возможно, начальной фазы зашумленного гармонического сигнала геомагнитного индекса по короткой выборке. Трудности, которые возникают в подобных задачах оценивания, состоят в том, что такие параметры как частота и начальная фаза входят в исходное уравнение наблюдения нелинейно. Существует два подхода к задаче оценивания в условиях шума: стохастический и нестохастический. В рамках нестохастического подхода, который активно развивается в последнее время многими исследователями, метод построения множественных оценок этих параметров предложен в ряде работ. В частности, используется метод построения гарантированных оценок указанных параметров. Особенность этого метода состоит в том, что реализация алгоритма множественного оценивания не требует никаких нелинейных операций.



а)



б)

Рисунок 5.6. Данные наблюдений Dst-индекса и результаты гарантированного прогнозирования для одного и двух часов: а – линейная модель (3), б – нелинейная модель (4).

В данной работе были использованы две модели для прогнозирования Dst-индекса: линейная и нелинейная. Первая модель была определена только с использованием наиболее значимых линейных регрессоров

$$\begin{aligned} y(k) = & 1.25y(k-1) - 0.35y(k-2) + 2.5u(k) + 0.15y(k-3) + \\ & + 0.01y(k-6) - 2.74u(k-1) + 0.95u(k-2) - 0.2u(k-4) + \\ & + 0.14u(k-8), \end{aligned} \quad (5.7)$$

а вторая была идентифицирована с использованием линейных и нелинейных слагаемых

$$\begin{aligned} y(k) = & 2.5u(k) - 3.13u(k-1) + 0.65u(k-2) - 0.13u(k-4) + \\ & + 0.19u(k-8) + 0.11u(k-12) - 0.03u(k-14) + 0.07u(k-25) + \\ & + 1.17y(k-1) - 0.41y(k-2) + 0.12y(k-3) + 0.04y(k-6) + \\ & + 0.02y(k-12) - 0.004y(k-17) - 0.03u(k-3)y(k-9) + \\ & + 0.01u(k-7)y(k-12) + 0.01y(k-15)u(k-1) + 0.03u(k-15) \\ & u(k-6) - 0.003y(k-13)y(k-17) + 0.03y(k-20)u(k-4) - \\ & - 0.05y(k-21)u(k-4) - 0.35u(k-1)u(k-1) + +0.03u(k-16) \\ & y(k-2) - 0.022y(k-12)u(k-2) + 0.002y(k-15)y(k-12) - \\ & - 0.2u(k-1)u(k-3). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Из рис. 5.6 видно, что нелинейная модель даёт более точный прогноз.

5.5. Выводы к разделу

1. Предложен обобщенный подход к прогнозированию временного поведения Dst-индекса с использованием спутниковых данных наблюдений о параметрах солнечного ветра. Он базируется на структурно-параметрической идентификации нелинейной дискретной динамической системы типа «вход-выход» с несколькими переменными [30, 40, 41, 48]. Структура модели, а также ее параметры выбираются на основе решения задачи математического программирования с ограничениями [152], которые находятся из простых физических соображений.

2. Описан новый алгоритм прогнозирования динамики Dst-индекса с использованием билинейной динамической модели. Отмечено, что в ряде

случаев динамика Dst-индекса сводится к известной билинейной системе, где параметр (vB_z) солнечного ветра является системным входом модели, а Dst-индекс – выходом. Приведены результаты численных экспериментов для проверки эффективности алгоритмов идентификации на основе данных за период 1983-2005 годы. Численные эксперименты показали, что метод является полезным для прогнозирования магнитных бурь на 5 – 6 часов вперед.

3. Рассмотрена и решена проблема оценки локальных показателей Ляпунова для временных рядов Dst-индекса с учетом искажений экспериментальных измерений. Получены оценки локальных показателей Ляпунова на основании временных рядов для решения задачи прогнозирования геомагнитных бурь. Проведен анализ ошибок прогнозирования с использованием показателей Ляпунова.

4. Исследовано гарантированное прогнозирование временного поведения Dst-индекса. Обнаружена зависимость между интервалом прогнозирования и изменением входных параметров модели. Установлено, что ошибка (погрешность) прогнозирования нелинейно возрастает с увеличением времени прогнозирования. Была показана возможность прогнозирования поведения Dst-индекса в реальном времени.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Основные результаты работы:

1. В рамках одножидкостной идеальной МГД показано, что УНЧ возмущения в магнитосфере Земли могут быть корректно описаны в рамках магнитостатического равновесия и приближения дипольного магнитного поля. Получена система уравнений малых колебаний для произвольных УНЧ волн в дипольном магнитном поле, которая последовательно учитывает как продольную, так и поперечную структуру возмущений.

2. Найдено, что точными решениями полученной системы уравнений являются тороидальные альфвеновские моды и полоидальные альфвеновские моды, зацепленные через радиальную кривизну магнитных силовых линий с медленными магнитозвуковыми модами. Показано, что ММЗ моды самостоятельно в магнитосфере Земли не реализуются.

3. Установлен эффект затухания тороидальных альфвеновских волн в магнитосфере Земли благодаря эффекту перемешивания фаз возмущений.

Даны разъяснения, почему сейчас отсутствуют спутниковые наблюдения поперечно-мелкомасштабных УНЧ мод со «смешанной» поляризацией.

4. Впервые проанализировано самосогласованное движение бессиловых магнитных структур в плазменном потоке с учетом движения среды как внутри, так и снаружи структуры. Показано, что эти структуры могут приводить к генерации геомагнитных бурь, так как содержат южную компоненту межпланетного магнитного поля.

5. Построена численная дискретная билинейная модель поведения Dst-индекса во времени. Установлено, что эта модель может дать обоснованный прогноз поведения Dst-индекса на 5-6 часов вперед, и поэтому может быть использована для предсказания геомагнитных бурь.

6. Предложен подход к прогнозированию поведения Dst-индекса с помощью локальных показателей Ляпунова. Разработана процедура их

вычисления. Получено выражение для вычисления горизонта прогноза Dst-индекса с использованием спектра локальных показателей Ляпунова.

7. Получил дальнейшее развитие метод идентификации минимальной по сложности дискретной билинейной динамической модели прогнозирования Dst-индекса, который базируется на нахождении структуры и параметров модели оптимизационным методом с учетом ошибки прогнозирования и статистического критерия регулярности.

Развитые методы и предложенные модели могут быть использованы при подготовке и реализации космических проектов с участием Украины - «Ионосат», «Резонанс» и «Интергелиозонд».

БЛАГОДАРНОСТИ

В заключение диссертант считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность А.В. Агапитову, А.С. Парновскому и О.В. Семенову за плодотворное научное сотрудничество, сердечно поблагодарить за помощь в работе И.Т. Жука, А.А. Логинова и Н.В. Маслову.

Автор благодарит профессора Ю.П. Ладикова-Роева за научную поддержку в ходе выполнения диссертационной работы.

Слова особой благодарности научному руководителю В.А. Яценко, оказавшего сильное влияние на направление исследований диссертанта.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Агапитов А. В.* Спектр поперечно-мелкомасштабных возмущений во внутренней магнитосфере Земли / А. В. Агапитов, А. С. Парновский, О. К. Черемных // Кинематика и физика небесных тел. — 2006. — Т. 22, № 6. — С. 387—401.
2. *Агапитов А.В.* Генерация солнечным ветром собственных ULF мод магнитосферы Земли / А. В. Агапитов, О. К. Черемных // Космічна наука і технологія. — 2008. — Т. 14, № 4. — С. 72 – 81.
3. *Агапитов А.В.* Поляризация резонансных УНЧ-возмущений в магнитосфере Земли / А. В. Агапитов, О. К. Черемных // Кинематика и физика небесных тел. — 2011. — Т. 27, N3. — С.17 – 27.
4. *Акасофу С.И.* Солнечно-земная физика / С.И. Акасофу, С. Чепмен. — М.: Мир, 1975. — 900 с.
5. *Альвен Г.* Космическая электродинамика / Г. Альвен, К.Г. Фельтхаммер. — М.: Мир, 1967. — 260с.
6. *Антонова Е. Е.* Равновесие плазмы в магнитосфере и ускорительные процессы в высоких широтах: дисс. доктора физ.-мат. наук 01.04.08 / Елизавета Евгеньевна Антонова. — М., 2004. — 392 с.
7. *Арфкен Г.* Математические методы в физике / Г. Арфкен. — М.: Атомиздат, 1970. —712 с.
8. *Владимирский Б. М.* Космическая погода и наша жизнь / Б. М. Владимирский, Н. А. Темурьянц, В. С. Мартынюк. — Фрязино: Век-2, 2004. — 224 с.
9. *Гершман Б. Н.* Волновые явления в ионосфере и космической плазме / Б. Н. Гершман, Л. М. Ерухимов, Ю. Я. Яшин. — М.: Наука, 1984. — 392 с.
10. Геомагнитные пульсации и диагностика магнитосферы / Под ред. Л. Л. Ваньян — М.: Наука, 1973. — 93 с.

11. *Данжи Дж.* Космическая электродинамика / Дж. Данжи. — М.: Госатомиздат, 1961. — 206 с.
12. *Дзюбенко М.І.* Вступ до фізики навколоземного середовища / М.І. Дзюбенко. — Київ, 1994. — 240с.
13. *Ермолаев Ю.И.* Крупные геомагнитные возмущения и их корреляция с межпланетными явлениями в период работы спутников ИНТЕРБОЛ-1, 2. / Ю.И. Ермолаев // Космич. исслед. — 2001. — Т.39, №5. — С.324 – 331.
14. *Ермолаев Ю.И.* Статистическое исследование гелиосферных условий, приводящих к магнитным бурям / Ю.И. Ермолаев, М.Ю. Ермолаев, И.Г. Лодкина, Н.С. Николаева // Космич. исслед. — 2007. — Т.45, №1. — С.3 – 11.
15. *Иванов В.Н.* Желобковая неустойчивость в плазменном слое магнитосферы Земли / В.Н. Иванов, О.А. Похотелов // Физика плазмы. — 1987. — Т.13, №12. — С. 1446 – 1454.
16. *Иванов В. Н.* Магнитосферная суббуря как желобковая неустойчивость с непостоянным давлением / В. Н. Иванов, О. А. Похотелов // ДАН СССР. — 1989. — Т. 304, № 3. — С. 567 — 570.
17. *Кадо́мцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме / Б.Б. Кадо́мцев. — М.: Наука, 1988. — 303 с.
18. *Климушкин Д.Ю.* Метод описания альфвеновской и магнитозвуковой ветвей колебаний неоднородной плазмы / Д.Ю. Климушкин // Физика плазмы — 1994. — Т. 20, №3. — С. 309 – 315.
19. Космическая геофизика / Эгеланд А., Халтер О., Омхольт А.; пер. с англ. — М.: Мир, 1976. — 545 с.
20. Космическая магнитная гидродинамика / Под ред. Э.Приста и А.Худа. Пер. с англ. В. Н. Обридко и др. — М.: Мир, 1995. — 440 с.
21. *Кременецкий І.О.* Космічна погода: механізми та прояви. / І.О. Кременецкий, О.К. Черемних. — Київ: Наукова думка, 2009. — 144 с.
22. *Кузнецов Н.В.* Космическая радиация и прогнозирование сбое- и отказоустойчивости интегральных микросхем в бортовой аппаратуре

- космических аппаратов / Н.В. Кузнецов, М.И. Панасюк // Вопросы атомной науки и техники (ВАНТ): сер. радиационного воздействия на радиоэлектронную аппаратуру. – 2001. – В. 1-2. – С. 3 – 8.
23. *Ладиков-Роев Ю.П.* Математические модели сплошных сред / Ю.П. Ладиков-Роев, О.К. Черемных. – Киев: Наукова думка, 2010. – 552 с.
 24. *Ладиков-Роев Ю.П.* Магнитно-вихревая модель выбросов корональной массы / Ю.П. Ладиков-Роев, А.А. Линник, Н.Н. Сальников, О.К. Черемных. // Космическая наука и технология. – 2004. – Т.10, №5/6. – С.131 – 135.
 25. *Лайонс Л.* Физика магнитосферы: Количественный подход / Л. Лайонс, Д. Уильямс. — М.: Мир, 1987. — 312 с.
 26. *Ламб Г.* Гидродинамика / Г. Ламб. – ОГИЗ: Гостехиздат, 1947. – 929с.
 27. *Ландау Л.Д.* Теоретическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М Лифшиц. — М.: Наука, 1988. — Т.1: Механика. —216 с.
 28. *Ландау Л.Д.* Теоретическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М Лифшиц. — М.: Наука, 1973. — Т8: Электродинамика сплошных сред. – 208 с.
 29. *Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика / Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – М.: Наука, 1979. — Т10: Физическая кинетика – 527 с.
 30. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя / Л. Льюнг, Я.З. Ципкин ; Пер. А.С. Мандель, А.В. Назин. — М.: Наука, Гл. Ред. Физ.-мат. лит., 1991. — 441 с.
 31. *Мазур Н. Г.* Дисперсионное соотношение для баллонных мод и условие их устойчивости в околоземной плазме / Н. Г. Мазур, Е. Н. Федоров, В. А. Пилипенко // Геомагнетизм и аэрономия. – 2012. – Т. 52, № 5. – С. 1— 10.
 32. *Молчанов О. А.* Низкочастотные волны и индуцированные излучения в околоземной плазме / О. А. Молчанов. — М.: Наука, 1985. — 224 с.
 33. *Паркер Е.* Космические магнитные поля: в 2 т. Т. 2 / Е. Паркер. — М.: Мир, 1982. — 473 с.

34. *Парновский А. С.* Спектр баллонных возмущений с произвольной поляризацией во внутренней магнитосфере Земли / А. С. Парновский, О. К. Черемных // *Космічна наука і технологія*. — 2006. — 12, № 1/2. — С. 49—56.
35. *Пикельнер С.Б.* Основы космической электродинамики / С.Б. Пикельнер . — М.: Наука. —1966. — 408 с.
36. Плазменная гелиофизика: в 2 т. Т2 / Под ред. Л.М. Зелёного, И.С. Веселовского. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 672 с.
37. *Половин Р.В.* Основы магнитной гидродинамики / Р.В. Половин, В.П. Демуцкий. — М.: Энергоатомиздат, 1987. — 208 с.
38. *Прист Э.* Магнитное пересоединение: магнитогидродинамическая теория и приложения / Э. Прист, Т. Форбс. — М.:ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 592 с.
39. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды: в 2 т. Т.2 . / Л.И. Седов. — М.:Наука, 1970. — 568 с.
40. *Семенов О.В.* Оптимизационный подход к прогнозированию космической погоды / О.В. Семенов, В.И. Сидоренко, О.К. Черемных, Ю.В. Шатохина, В.А. Яценко // *Проблемы управления и информатики*. — 2008. — № 4. — С. 115 – 130.
41. *Семенов О.В.* Идентификация динамических моделей прогнозирования динамики Dst-индекса / О.В. Семенов, В.А. Яценко // *Космічна наука і технологія*. — 2010. — Т.16, №1. — С. 51 – 56.
42. *Силин В.П.* Введение в кинетическую теорию газов / В.П. Силин. — М.: Наука,1971. — 332 с.
43. *Тверской Б. А.* Динамика радиационных поясов / Б. А. Тверской. — М.: Наука, 1968. — 223 с.
44. *Фанштейн В.Г.* Корональные выбросы массы: сравнение простой модели с наблюдениями / В.Г. Фанштейн // *Труды междунар. конф. "Солнечно-земн. физика"*. — Иркутск, 2005. — С. 64 – 66.

45. *Цытович В.Н.* Теория турбулентной плазмы / В.Н. Цытович. – М.: Атомиздат, 1970. –423с.
46. *Черемных О.К.* О структуре азимутально-мелкомасштабных УНЧ-колебаний горячей космической плазмы в кривом магнитном поле. Моды с непрерывным спектром / О.К. Черемных, Д.Ю. Климушкин, Д.В. Костарев / Кинематика и физика небесных тел. –2014 – Т. 30, № 5. – С. 3 – 21.
47. *Шабанский В. П.* Явления в околоземном пространстве / В. П. Шабанский. — М.: Наука, 1972. — 272 с.
48. *Яценко В.А.* Идентификация моделей геомагнитной активности и прогнозирование космической погоды / В.А. Яценко, О.К. Черемных, В.М. Кунцевич, О.В. Семенив // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 6. – С. 114 – 125.
49. *Arpad Kis.* Gyrosurfing Acceleration of Ions in Front of Earth's Quasi-parallel Bow Shock / Arpad Kis, O. Agapitov, V. Krasnoselskikh, Yu. Khotyaintsev // *Ap.J.* – 2013. – V. 771. – №. 4, doi:10.1088/0004-637X/771/1/4.
50. *Artemyev, A. V.* Parametric validations of analytical lifetime estimates for radiation belt electron diffusion by whistler waves / A. V. Artemyev, D. Mourenas , O. V. Agapitov, V. V. Krasnoselskikh // *Ann. Geophys.* – 2013. – V. 31. – P. 599-624, doi:10.5194/angeo-31-599-2013.
51. *Agapitov A. V.* Magnetospheric ULF waves driven by external sources / A. V. Agapitov, O. K. Cheremnykh // *Adv. Astronomy and Space Physics.* – 2013. – V. 3, №1. – P. 12 – 19.
52. *Agapitov A. V.* Ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth: spectrum, stability and eigenmode analysis / A. V. Agapitov, O. K. Cheremnykh, A. S. Parnowski // *Adv. Space Res.* — 2008. — V. 41, N 10. — P. 1682—1687.
53. *Agapitov O.* Natural oscillations of the Earth magnetosphere associated with solar wind sudden impulses / O. Agapitov, O. Cheremnykh // *Ukrainian Journal of Physics.* – 2008. – V. 53. – P. 506–510.

54. *Agapitov O.* Statistics of whistler-mode waves in the outer radiation belt: Cluster STAFF-SA measurements. / O. Agapitov, V. Artemyev. Y. Krasnoselskikh, V. Khotyaintsev, D. Mourenas, H. Breuillard, M. Balikhin, and G. Rolland // *J. Geophys. Res. Space Physics.* – 2013. – V.118. – P. 3407–3420, doi: 10.1002/jgra.50312.
55. *Agapitov A.V.* Surface Waves and Field Line Resonances / A.V. Agapitov K.-H. Glassmeier, F. Plaschke // *J. Geophys. Res.* – 2009. – V.114, doi:10.1029/2008JA013553.
56. *Aleksahov D.* Axially symmetric MHD model for the solar wind. – LIS M interaction / D. Aleksahov, V. Baranov et. all. // *Astron. Lett.* – 2000. – 2b. – P.743-749.
57. *Amritkar R.E.* Stability of Periodic Orbits of Coupled-Map Lattices / R.E. Amritkar, P.M. Gade, A.D. Gangal, and V. M. Nandkumaran // *Physical Review A.* – 1991. – V. 44. – P. 3407 – 3410.
58. *Anderson B. J.* Statistical studies of Pc 3–5 pulsations and their relevance for possible source mechanisms of ULF waves / B. J. Anderson // *Ann. Geophysicae.* – 1993. — V. 11. – P. 128.
59. *Anh V.* Prediction of magnetic storm events using the *Dst*-index / V. Anh, Z. Yu, J. Wanliss, S. Watson // *Nonlin. Processes Geophys.* – 2005. – V. 12 – P. 799 – 746.
60. *Arber T.D.* Effect of Solar Chromospheric Neutrals on Equilibrium Field Structures / T.D. Arber, G.J. Botha, C.S. Brady // *Astrophysical Journal.* – 2009. – V. 705 – P. 1183 – 1188.
61. *Arber T.D.* A Staggered Grid, Lagrangian-Eulerian Remap Code for 3-D MHD Simulations / T.D. Arber, A.W. Longbottom, C.L. Gerrard., A.M. Milne // *J. Computational Physics.* – 2001. – V. 171 – P. 151 – 181.
62. *Ashwanden M.J., Poland A.I., Rabin D.M.* The new solar corona / M.J. Ashwanden, A.I. Poland, D.M. Rabin // *Annual Review on Astronomy and Astrophysics.* – 2001. – V.39. – P. 175 – 210.

63. *Aschwander M.J.* Physics of the Solar Corona / M.J Aschwander. – Springer: PRAXIS, 2004. – 819 p.
64. *Axford W. I.* The interaction between the solar wind and the Earth's magnetosphere / W. I. Axford // J. Geophys. Res. — 1962. — V. 67. — P. 3791 — 3796.
65. *Balikhin M.* Identification of linear and nonlinear processes in space plasma turbulence / M. Balikhin, I. Bates, S.N. Walker // Adv. Space Res. – 2001. – V. 28. – P.787 – 800.
66. *Bateman G.* MHD Instabilities / G. Bateman. – Cambridge: Mass. MIT Press, 1978. – 270 p.
67. *Billings S.A.* Extended model set, global data and threshold model identification of several nonlinear systems / S.A. Billings, S. Chen // Int. J. Control. – 1980. – V. 50. – P.1897 – 1923.
68. *Bothmer V.* // Space weather – physics and effects / V. Bothmer, I.A. Daglis. – New-York: Springer-Verlag, 2010. – 438 p.
69. *Bousquet O.* Introduction to statistical learning theory / O. Bousquet, S. Boucheron, G. Lugosi // Advanced Lectures on Machine Learning. – 2003. – P. 169 –207.
70. *Boyd S.* Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with Volterra series / S. Boyd, L.O. Chua // IEEE Trans. Circuit Syst. – 1985. – V. 32, №11. – P.1150 – 1160.
71. *Boynton R. J.* Data derived narmax dst model / R. J. Boynton, M. A. Balikhin, S. A. Billings, A. S. Sharma, O. A. Amariutei // Ann. Geo. – 2011. – V. 29. – P. 965-971.
72. *Boynton R. J.* Application of nonlinear autoregressive moving average exogenous input models to geospace: advances in understanding and space weather forecasts / R. J Boynton, M. A. Balikhin, S. A. Billings, O. A. Amariutei // Ann. Geo. – 2013. – V.31. – P. 1579 – 1589.
73. *Boynton, R. J.* The analysis of electron fluxes at geosynchronous orbit employing a NARMAX approach / R. J Boynton, M. A. Balikhin, S. A.

- Billings, G. D. Reeves, N. Ganushkina, M. Gedalin, O. A. Amariutei, J. E. Borovsky, S. N. Walker // *J. Geophys. Res. (Space Physics)*. – 2013. – V. 118. – P. 1500-1513.
74. *Boynton R. J.* Using the NARMAX OLS_ERR algorithm to obtain the most influential coupling functions that affect the evolution of the magnetosphere / R. J Boynton, M. A. Balikhin, S. A. Billings, H. L. Wei, N. Ganushkina // *J. Geophys. Res. (Space Physics)*. – 2011. – V. 116. – A05218
75. *Boynton, R. J.* The coupling between the solar wind and proton fluxes at GEO / R. J Boynton, S. A. Billings, O. A. Amariutei, and I. Moiseenko // *Ann. Geo.* – 2013. – V. 31. – P. 1631-1636.
76. *Burdo O. S.*, Study of ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth / O. S. Burdo, O. K. Cheremnykh., O. P. Verkhoglyadova // *IZV AKAD NAUK FIZ.* — 2000. — V. 64, № 9. — P. 1896 — 1900.
77. *Burges C.J.C.* A Tutorial on Support Vector Machines for Pattern Recognition / C.J.C. Burges // *Data Mining and Knowledge Discovery*. – 1998. – V. 2. – P. 121 – 167.
78. *Burton R.*, An empirical relationship between interplanetary conditions and Dst. / R. Burton, R. McPherron., C. J. Russell // *J. Geophys. Res.* – 1975. – V. 80(31). – P. 4204 – 4214.
79. *Callenrode M.-B.* *Space Physics* / M.-B . Callenrode. — Berlin: Springer-Verlag, 2004. — 482 p.
80. *Cargill P.J.* Modelling interplanetary CMEs using magnetohydrodynamic simulations / P.J. Cargill, J.M. Schmidt // *Annales Geophysicae*. – 2002. – V.20. – P. 879 – 890.
81. *Catto P.G.* Toroidal field effects on dipole equilibrium and stability at finite plasma pressure / P.G. Catto, S.I. Krasheninnikov // *Phys. Plasmas*. –2000. – V.7, №8. – P.1452 – 1488.
82. *Chen S.* Representations of non-linear systems: the NARMAX model / S. Chen, S.A. Billings // *Int. J. Control*. – 1989. – V.49, №3. – P.1013 – 1032.

83. *Chen J.* Physics of coronal mass ejections: a new paradigm of solar eruption / J. Chen // *Astrophysical Journal*. – 2002. – V.602. – P.165 – 190.
84. *Cheng A. F.* Magnetospheric interchange instability / A. F. Cheng // *J. Geophys. Res.* — 1985. — V. 90. — P. 9900 – 9904.
85. *Cheng C.Z.* Magnetospheric equilibrium with anisotropic pressure / C.Z. Cheng // *J.Geoph. Res.* – 1992. – V. 97, №A2. – P. 1497 –1510.
86. *Cheng C.Z.* Magnetohydrodynamic theory of field line resonances in the magnetosphere / C.Z . Cheng, T.C. Chang, C.A. Lin., W.N. Tsai // *J. Geophys. Res.* – 1993. – V. 98A, №7. – P. 11339 – 11347.
87. *Cheremnykh O.K.* Transversal small-scale MHD perturbations in the space plasma with magnetic surfaces / O.K. Cheremnykh, V.V. Danylova // *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. – 2011. – V. 27, № 2. – P. 98 – 108.
88. *Cheremnykh O.K.* Influence of ionospheric conductivity on the ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth / O. K. Cheremnykh, A. S. Parnowski // *Adv. Space Res.* – 2006. – V. 37., №3. – P. 599 – 603.
89. *Cheremnykh O.K.* Perturbations and collective motions of plasma in the inner magnetosphere of the Earth / O.K Cheremnykh, A. Parnowski, O. Agapitov // *Space Research of Ukraine 2006 – 2008, National Space Agency of Ukraine*. – Kiev, 2008. – P. 15–18,
90. *Cheremnykh O. K.* Ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth / O. K. Cheremnykh, A. S. Parnowski, O. S. Burdo // *Planet. Space Sci.* — 2004. — V. 55, № 13. — P. 1217 — 1229.
91. *Cheremnykh O.* Nonlinear Dynamical Model for Space Weather Prediction. /O. Cheremnykh., V. Yatsenko, O. Semeniv, Iu. Shatokhina // *Ukr. J. Phys.* — 2008. — V. 53, № 5. — P. 502 — 504.
92. *Chia R.* From complexity science to complex thinking: Organizations as simple location / R. Chia // *Organization*. – 1998. – V. 5. – P. 341 – 369.

93. *Chisham G.* A statistical study of the local time asymmetry of Pc5 ULF wave characteristics observed at midlatitudes by SAMNET / G. Chisham, D. Orr // *J. Geophys. Res.* — 1997. — V. 102, №. A11. — P. 24,339 — 24,350.
94. Coronal and stellar mass ejections : Proceeding of the 22^{6th} symposium of the international astronomical union Held in Beijing, China, 13-17 September 2004 / Cambridge University. – Cambridge, 2004. – 515 p.
95. *Coult N.* Suppression of resonant field line oscillations by turbulent background / N. Coult, V. Pilipenko, M. Engebretson // *Plan. Space Sci.* – 2007. – V. 55. – 694–700. doi: 10.1016/j. pss. 2006. 03.017.
96. *Daglis I.A.* Effects of Space Weather on Technology Infrastructure / I.A. Daglis // NATO Science Series. – Kluwer Academic Publisher, 2004. – 334 p.
97. *Ding M.* Stability of Synchronous Chaos and On-Off Intermittency in Coupled Map Lattices / M. Ding and W. Yang // *Physical Review E.* – 1997. – V. 56. – P. 4009 – 4016.
98. *Engebretson M.J.* Harmonically structured ULF-perturbations observed by the AMPTE CCE magnetic field experiment / M.J. Engebretson, L. Zaneets, T.A. Potemra, M.H. Acuna // *Geophys. Res. Lett.* – 1986. – N13. – P.905 – 908.
99. *Fedorov E.* ULF wave damping in the auroral acceleration region / E. Fedorov, V. Pilipenko & M. J. Engebretson // *J. Geophys. Res.* – 2001. – V. 106. – P. 6203–6212.
100. *Forbs T.G.* A review on genesis of coronal mass ejections / T.G. Forbs // *J. Geophys. Res.* – 2000. – V. 105. Issue A 10. – P.23,153 – 23,165.
101. *Fuller T.* Small enterprises as complex adaptive systems: a methodological question / T. Fuller, P. Moran // *Entrepreneurship and Regional Development.* – 2001. – V. 13. – P. 47 – 63.
102. *Ganushkina, N. Yu.* Role of substorm-associated impulsive electric fields in the ring current development during storms / N. Yu. Ganushkina, T. I. Pulkkinen, T. Fritz. // *Ann. Geophys.* – 2005. – V. 23. – P. 579 – 591.

103. *Ganushkina, N. Yu.* Low energy electrons (5-50 keV) in the inner magnetosphere / N. Yu. Ganushkina, M. W. Liemohn, O. A. Amariutei, D. Pitchford // *J. Geophys. Res.* – 2014. – V. 119, doi:10.1002/2013JA019304
104. *Ganushkina N. Yu.* Storm-time ring current: model-dependent results / N. Yu. Ganushkina, M. W. Liemohn, T. I. Pulkkinen. // *Ann. Geophys.* – 2012. – V. 30 – P. 177 – 202.
105. *Ganushkina N. Yu.* Transport of the plasma sheet electrons to the geostationary distances / N. Yu. Ganushkina, O. A. Amariutei, Y. Y. Shprits, and M. W. Liemohn // *J. Geophys. Res.* – 2013. – V. 118, doi:10.1029/2012JA017923.
106. *Ganushkina N.* Evolution of the proton ring current energy distribution during 21-25 April 2001 storm / N. Ganushkina, T. I. Pulkkinen, M. Liemohn, A. Milillo // *J. Geophys. Res. : Space Physics.* – 2006. – V. 111(A 11) – P. A11S08, doi:10.1029/2006JA011609.
107. *Glass L.* From Clocks to Chaos : The Rhythms of Life / L. Glass, and C. Mackey. – Princeton University Press, Princeton, New Jersey. – 1988. – 272 p.
108. *Gleisner H.* Predicting geomagnetic storms from Solar wind data using time-delay neural networks / H. Gleisner, H. Lundstedt, P. Wintoft // *Annales Geophysica.* – 1996. – V. 14. – P. 676 – 686.
109. *Goertz C.K.* Prediction of geomagnetic activity/ C.K. Goertz, L.H. Shan, R.A. Smith // *J. Geophys.* – 1993. – V. 98. – P. 7673 – 7684.
110. *Gold T.* Motions in the magnetosphere of the Earth / T. Gold // *J. Geophys. Res.* — 1959. — V. 64. — P. 1219 — 1226.
111. *Gold T.* Magnetic storms / T. Gold // *Space Sci. Rev.* — 1962. — V. 1, Issue 1. — P. 100– 114.
112. *Goodman J.M.* Space Weather & Telecommunication / J.M. Goodman – New York: The Kluwer International Series in Engineering & Computer Science. Springer Science + Business Media Inc. – 2005. – 382 p.
113. *Grassberger P.* Measuring the strangeness of strange attractors / P Grassberger, I. Procaccia // *Physica D.* – 1983. – V. 9, Issue 1. – P. 189 – 208.

114. *Gussenhoven M.S.* Radiation Belts. Models and Standards. Philips Laboratory Space Physics Division Radiation Models / M.S. Gussenhoven, E.G. Mullen, D.H. Brautigam // Geophysical Monograph. – 1996. – V. 97 – P. 93 – 108.
115. *Hameiri E.* Physics of Plasmas / E. Hameiri. – 1999. – 674 p.
116. *Hameiri E.* Magnetospheric Waves and the Atmosphere-Ionosphere Layer / E. Hameiri, M. G. Kivelson // J. Geophys. Res. – 1991. – V. 96, N A12. – P. 21125 —21134.
117. *Hameiri E.* The ballooning instability in space plasmas / E. Hameiri, P. Laurence, M. Mond // J. Geophys. Res. – 1991. – V.96. – P. 1513 – 1518.
118. *Han Jiling* Coronal transients caused by the drift electric field / Jiling Han // Solar Physics. – 1998. – V. 178. – P. 179 – 182.
119. *Hansmeier A.* The sun and space weather / A. Hansmeier. – Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publisher, 2002. – 243 p.
120. *Hurricane O. A.* MHD ballooning stability of a sheared plasma sheet / O. A. Hurricane // J. Geophys. Res. — 1997. — V. 102, № A9. — P. 19903 — 19911.
121. *Hurricane O. A.* Substorm detonation / O. A. Hurricane, B. H. Fong, S. C. Cowley et al. // J. Geophys. Res. — 1999. — V. 104, № A5. — P. 10221 — 10231.
122. *Iasemidis L.D.* Chaos Theory and Epilepsy / L.D. Iasemidis and J.C. Sackellares // The Neuroscientist. – 1996. – V. 2. – P. 118 – 126.
123. *Iasemidis L.D.* Prediction of Human Epileptic Seizures Based on Optimization and Phase Changes of Brain Electrical Activity / L.D. Iasemidis, P.M. Pardalos, D.S. Shiau and others // Optimization Methods and Software. – 2003. – V. 8. – P. 81 – 104.
124. *Iasemidis L.D.* The Temporal Evolution of the Largest Lyapunov Exponent on the Human Epileptic Cortex, Measuring chaos in the human brain / L.D. Iasemidis, D.W. Duke and W.S. Prichard. – Republic of Singapore, 1991. – P. 49 – 82.

125. *Iasemidis L.D.* Transition to Epileptic Seizures: An Optimization Approach into its Dynamics / L.D. Iasemidis, D.S. Shiau, P.M. Pardalos, and J.C. Sackellares // Discrete Problems with Medical Applications / Edited by D.Z. Du, P.M. Pardalos and J. Wang // DIMACS Series. - American Mathematical Society Publishing Co: Providence, RI. – 2000. – V. 55. – P. 55 – 74.
126. *Iasemidis L.D.* Phase Space Topography of the Electrocorticogram and Lyapunov Exponent in Partial Seizures / L.D. Iasemidis, J.C. Sackellares., H.P. Zaveri and W.J. Williams. / Brain Topography . – 1990. – V. 2, Issue 3. – P. 187– 201.
127. *Johansen T.A.* Constrained and regularized system identification / T.A. Johansen // IFAC Symp. on System Identification. – Kitakyushu. – 1997. – P. 5.
128. *Johansen T. A.* Multi-objective identification of fir models / T. A. Johansen // IFAC Symp. on System Identification. – Santa Barbara, USA. – 2000. – P. 917 – 922.
129. *Kaneko K.* Periodic-Doubling of Kink-Antikink Patterns, Quasiperiodicity in Antiferro-Like Structures and Aperiodic Intermittency in Coupled Logistic Lattice / K. Kaneko // Progress of Theoretical Physics. – 1984. – V. 72. – P. 480 – 486.
130. *Kepko L.* Observations of discrete, global magnetospheric oscillations directly driven by solar wind density variations / L. Kepko, H. E. Spence // J. Geophys. Res. — 2003. — V. 108, №A6. — P. 1257, doi: 10.1029/2002JA009676
131. *Kivelson M.G.* Introduction to the space physics / M.G. Kivelson, C.T. Krissel— Cambridge: Cambridge Univ. Press. – 1995. – 568 p.
132. *Klimushkin, D.* Toroidal and poloidal Alfvén waves with arbitrary azimuthal wavenumbers in a finite pressure plasma in the Earth's magnetosphere / D. Klimushkin, P. Mager, K. Glassmeier // Ann. Geophys. – 2004. – V. 22. – P. 267–287.

133. *Koza J.* Genetic programming IV: routine human competitive intelligence / J. Koza . – Kluwer Academic Publishers, 2003. – 590 p.
134. *Koza J.* Genetic Programming: On the programming of Computers by Means of Natural Evolution / J. Koza. – The MIT Press, 1998. – 840 p.
135. *Krasnoselskikh V.* The Dynamic Quasiperpendicular Shock: Cluster Discoveries / V. Krasnoselskikh, M. Balikhin , S. N. Walker, S. Schwartz , D. Sundkvist, V. Lobzin, M. Gedalin, S. D. Bale, F. Mozer, J. Soucek, Y. Hobara, H. Comisel // Space Sci. Rev. – 2013: DOI 10.1007/s11214-013-9972-y.
136. *Kuijpers J.* Are coronal mass ejections caused by magnetic pumping? / J. Kuijpers, L. Fletcher // Solar Physics. – 1996. – V. 169. – P.415 – 420.
137. *Lakhina G.S.* Ballooning mode instability at the plasmopause / G.S. Lakhina, M. Mond, E. Hameiri // J. Geophys. Res. – 1990. – V. 95, №A4. – P. 4007 – 4016.
138. *Lakhina G. S.* Ballooning instability of the Earth's Plasma Sheet Region in the Presence of Parallel Flow / G. S. Lakhina, E. Hameiri, M. Mond // J. Geophys. Res. — 1990. — V. 95, № A7. — P. 10441 — 10448.
139. *Lee D.-Y.* On the possibility of the MHD-ballooning instability in the magnetotail-like field reversal /D.-Y. Lee, K. W. Min // J. Geophys. Res. — 1996. — V. 101, № A8. — P. 17347 — 17354.
140. *Lee D.-Y.* Ballooning instability in the tail plasma sheet / D.-Y. Lee // Geophys. Res. Lett. — 1998. — V. 25, № 21. — P. 4095 — 4098.
141. *Leonovich A. S.* Standing Alfvén waves with $m \gg 1$ in an axisymmetrical magnetosphere excited by a stochastic source / A. S. Leonovich, V. A. Mazur // Ann. Geophysicae. — 1998. — V. 16. — P. 900 — 913.
142. *Leontaritis I.J.* Input-output parametric models for nonlinear systems. Part.I. Deterministic nonlinear systems / I.J. Leontaritis, S.A. Billings // Int. J. Control. – 1985. – V.41. – P. 303 – 304.

143. *Ljung L.* Nonlinear black box models in system identification / L. Ljung // Proc. of IFAC symposium on Advanced Control of Chemical Processes. – Banff, Canada. – 1997. – P.1 – 13.
144. *Lui A. T. Y.* Evolution of the ring current during two geomagnetic storms / A. T. Y. Lui, R. W McEntire, S. M. Krimigis // J. Geophys. Res. – 1987. – V. 92A, N 7. – P. 7459 – 7470.
145. *Mager P. N.* Theory of azimuthally small-scale Alfvén waves in an axisymmetric magnetosphere with small but finite plasma pressure / P. N. Mager, D. Yu. Klimushkin // J. Geophys. Res. — 2002. —107(1356), doi: 10.1029/2001JA009137.
146. *Manchester W.B., B. van der Holst, B. Lavraud.* Flux rope evolution in ICMEs: The 2005 May 13 event / W.B Manchester, B. van der Holst, B. Lavraud // Plasma Phys. Control. Fusion. – 2014. – V. 56. – 064006 – doi: 10.1088/0741-3335/56/6/064006
147. *Mann I. R.* Excitation of magnetospheric waveguide modes by magnetosheath flows / I. R. Mann, A. N. Wright, K. J. Mills, V. M. Nakariakov // J. Geophys. Res. – 1999. – V.104. – P. 333 – 353.
148. *Mathie R. A.* Pc5 ULF pulsations associated with waveguide modes observed with the IMAGE magnetometer array / R. A. Mathie, I. R. Mann, F. W. Menk // J. Geophys. Res. – 1999. – V.104. – P. 7025 – 7036.
149. *Mayaud P.N.* Derivation, meaning and use of geomagnetic indices / P.N. Mayaud // Geophysical Monograph Series. V.22. – Washington.D.C., 1980. – – 154 p.
150. *McIlwain C. E.* Coordinates for mapping the distribution of magnetically trapped particles / C. E. McIlwain // J. Geophys. Res. – 1961. – V. 66. – P. 3681 – 3691.
151. *Merrifield J.A.* The scaling properties of two-dimensional compressible magnetohydrodynamic turbulence / J.A. Merrifield, T.D. Arber, S.C. Chapma, R.O. Dendy // Physics of Plasmas. – 2006. – V. 13. – 012305.

152. *Minoux M.* Mathematical Programming: Theory and Algorithm / M. Minoux. – John Wiley and Sons, 1986. – 489 p.
153. *Moldwin M.* An introduction to space weather / M. Moldwin. – Cambridge University Press, 2008. – 146 p.
154. *Morgul O.* Model Based Anticontrol of Discrete-Time Systems / O. Morgu // Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. – 2003. – P. 1895 – 1896.
155. *Mourenas, D.* Analytical estimates of electron quasi-linear diffusion by fast magnetosonic waves / D. Mourenas, A. V. Artemyev, O. V. Agapitov, V. Krasnoselskikh // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2013. – V.118, Issue 6. – P. 3096 – 3112, DOI 10.1002/jgra.50349.
156. *Nair S.P.* Dynamical Changes in the Rat Chronic Limbic Epilepsy Model / S.P. Nair, D.S. Shiau, W.M. Norman, and others // Epilepsia. – 2004. – V. 45-57. – P. 211 – 212.
157. *Nicolis G.* Exploring complexity: An introduction / G. Nicolis, I. Prigogine. – New York: W.H. Freeman, 1998. – 328 p.
158. *Nishida A.* Geomagnetic diagnosis of the magnetosphere / A. Nishida. – Springer-Verlag, 1978. – 256 p.
159. OMNI2 database. National Space Science Data Center / Space Physics Data Facility. <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/omniweb/> Cited 24 Sep 2012.
160. *Pardalos P.M.* Seizure Warning Algorithm Based on Optimization and Nonlinear Dynamics / P.M. Pardalos, W. Chaovaitwongse, Iasemidis and others // Mathematical Programming. – 2004. – V. 101. – P. 365 – 385; 493-506.
161. *Pardalos P.* Optimization and control of bilinear systems: theory, algorithms, applications / P. Pardalos, V. Yatsenko. – Pub. Springer, Dordrecht–Boston–London, 2008.– P. 370.
162. *Parker E.N.* Dynamics of the interplanetary gas and magnetic fields // Astrophys. J. – 1958 – V. 128. – P. 664 – 675.

163. *Parnowski A. S.* Eigenmode analysis of ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth / A. S. Parnowski // *Ann. geophys.* – 2007. – V. 25, N 1. – P. 1391–1403.
164. *Piddington J. H.* Geomagnetic storm theory / J. H. Piddington // *J. Geophys. Res.* – 1960. – V. 65. – P. 93 – 106.
165. *Pilipenko V.* Interaction of Alfvén waves with a turbulent layer / V. Pilipenko, E. Fedorov & M. J. Engebretson // *Earth, Planets and Space.* – 2008. – v. 60. – P. 949 – 960.
166. *Pilipenko V.* Energy budget of Alfvén wave interactions with auroral acceleration region. / V. Pilipenko, E. Fedorov, M. J. Engebretson, K. Yumoto // *J. Geophys. Res.* – 2004. – V. 109. – A10204, doi:10.1029/2004JA010440.
167. *Pokhotelov O. A.* Drift anisotropy instability of finite- B / O. A. Pokhotelov, V. A. Pilipenko // *Planet. Space Sci.* – 1985. – V.33. – P. 1229 – 1241.
168. *Polovin R. V.* Basic magnetic hydrodynamics / R. V. Polovin, V. P. Demutsky. – Moscow: Energoatomizdat, 1987. – 206 p.
169. *Rae I. J.* Evolution and Characteristics of Global Pc5 ULF Waves During a High Solar Wind Speed Interval / I. J. Rae, E. F. Donovan, I. R. Mann // *J. Geophys. Res.* – 2005. – V.110. – A12211, doi:10.1029/2005JA011007.
170. *Ramaswamy R.* Targeting Chaos through Adaptive Control / R. Ramaswamy, Sinha, and S. Gupte // *Physical Review E.* – 1998. – V. 57. – P. 2507 – 2510.
171. *Romashets E. P.* Propagation of a toroidal magnetic cloud in interplanetary space / E. P. Romashets, M. Vandas // *Adv. Space Res.* – 2002. – V. 29, №3. – P. 313 – 318.
172. *Samson J. C.* Field line resonances associated with MHD waveguides in the magnetosphere / J. C. Samson, B. G. Harrold, J. M. Ruohoniemi, A. D. Walker // *Geophys. Res. Lett.* – 1992. – V.19 (5) – P. 441 – 444.
173. *Schindler K.* *Physics of Space Plasma Activity* / K. Schindler. – Cambridge University Press, 2007. – 522 p.

174. *Schwenn R.* Large-scale structure of the interplanetary medium / R. Schwenn // *Physics of the inner heliosphere.* – Heidelberg: Springer-Verlg., 1990. – 181 p.
175. *Semeniv O.* Optimization Approach to Space Weather Prediction / O. Semeniv, V. Sidorenko, Yu. Shatokhina, O. Cheremnykh, V. Yatsenko // *J. Automation and Information Sciences.* – 2008. – V.40, №8. – P. 41–56.
176. *Semeniv O.* Identification of Dynamical Models for Dst-Index Forecasting. Control Problems and Informatics / O. Semeniv, V. Yatsenko. – 2010. – V.16, №1. – P 51–56.
177. *Sharifi J.* Multi-step prediction of *Dst*-index using singular spectrum analysis and locally linear neurofuzzy modeling / J. Sharifi, B.N. Araabi, C. Lucas // *Earth Planets Space.* – 2006. – V.58, №3. – P. 331 – 341.
178. *Shevchenko V. V.* Continuous transitions in open waveguides / V. V. Shevchenko. – Golem Press, Boulder, Collorado, 1971. – 170 p.
179. *Shiau D.S.* Dynamical Resetting of the Human Brain at Epileptic Seizures: Application of Nonlinear Dynamics and Global Optimization Techniques / D.S. Shiau, J.C. Sackellares, P.M. Pardalos // *IEEE Transactions on Biomedical Engineering.* – 2004. – V. 51. – P. 493 – 506.
180. *Singer H. J.* Multisatellite observations of resonant hydromagnetic waves / H. J. Singer // *Planet. Space Sci.* – 1982. – V.30. – P. 1209 – 1218.
181. *Sokolov I.V.* Magnetohydrodynamic waves and coronal heating: unifying empirical and MHD turbulence models / I.V. Sokolov, B. van der Holst, R. Oran, C. Downs, I.I. Roussev, M. Jin, W.B. Manchester, R.M. Evans, T.I. Gombosi // *Ap. J.* – 2013. – P. 764, 23 - doi:10.1088/0004-637X/764/1/23.
182. *Southwood D. J.* Magnetospheric interchange motion / D. J Southwood, M. G. Kivelson // *J. Geophys. Res.* — 1989. — V. 94. — P. 299 — 308.
183. *Stewart B.* On the great magnetic disturbance which extended from August 28 to September 7, 1859, as recorded by photography at the Kew Observatory / B. Stewart // *Phil. Trans. Roy. Soc.* — 1861. — 151. — P. 423—430.

184. *Sugiura M.* Hourly values of equatorial Dst for the IGY / M. Sugiura / In: Ann.of the Int. Geophysical Year. V. 35. – Pergamon Press, Oxford. – 1964. – P. 945– 948.
185. *Takahashi K.* Observation and theory of Pc5 waves with harmonically related transverse and compressional components / K. Takahashi, C.Z. Cheng, R.W. McEntire // J. Geophys. Res. – 1990. – 95A, N2. – P. 977 – 989.
186. *Tamao T.* Transmission and coupling resonance of hydromagnetic disturbances in the non-uniform Earth's magnetosphere / T. Tamao // Sci. Rep. Tohoku Univ. – 1965. – V. 17, №2. – P.43–72.
187. *Temerin M., Li X.* A new model for the prediction of *Dst* on the basis of the solar wind / M. Temerin, X. Li // J. Geophys. Res. – 2002. – V. 107 (A12) .– 1472, doi: 10.1029/2001JA 007532
188. *Toth G.* Adaptive Numerical Algorithms in Space Weather Modeling / G. Toth, B. van der Holst, I.V. Sokolov, D.L. De Zeeuw, T.I. Gombosi, F. Fang, W.B. Manchester IV, X. Meng, D. Najib, K.G. Powell, Q.F. Stout, A. Glocer, Y.-J. Ma, M. Opher // J. Comp. Phys. – 2012. – V.231. – P. 870 – 903.
189. *Vandas M.* Spheroidal Models of Magnetic Clouds and their Comparison with Spacecraft Measurements / M. Vandas, S. Fischer, P. Pelant and A. Geranios // J. Geophys. Res. – 1993. – V. 98. – P.11467 – 11475.
190. *Treumann R. A.* Advanced Space Plasma Physics / R. A. Treumann, W. Baumjohann — Berlin: Imperial College Press, 1998. — 381 p.
191. *Van der Holst B.* Alfvén wave solar model (AWSoM): coronal heating / B. Van der Holst, I.V. Sokolov, X. Meng, M. Jin, W.B. Manchester, G. Toth, T.I Gombosi // Astrophysical Journal. – 2014. — V. 81. — P. 782.
192. *Van der Holst B.* A data-driven, two-temperature solar wind model with Alfvén waves / B. Van der Holst, W.B. Manchester, R.A. Frazin, A.M. Vasquez, G. Toth, and T.I. Gombosi // Ap. J. – 2010. – V. 725 – P. 1373 – 1383.

193. *Vandas M.* Propagation of toroidal magnetic cloud in interplanetary space / M. Vandas, E.P. Romashets // *Adv. Space. Res.* – 2002. – V.29, №3. – P. 313 – 318.
194. *Vapnik V.N.* Statistical learning theory / V.N. Vapnik.— New York: John Wiley and Sons Inc., 1998. – 736 p.
195. *Vapnik V.* The Nature of Statistical Learning Theory / V. Vapnik. – New York: Springer, 1995. – 320 p.
196. *Villante U.* Pc5 geomagnetic field fluctuations at discrete frequencies at a low latitude station / U. Villante, P. Francia, S. Lepidi // *Annales Geophysicae.* — 2001. — V. 19. — P. 321 — 325.
197. *Wang H.* Space weather: scientific forecasting / H. Wang, P. T. Gallagher, V. Yurchyshyn // *COSPAR Colloquia Series.* — 2002. — V. 14. — P. 375 — 383.
198. *Wang X.F.* Anticontrol of Chaos in Continuous-Time Systems via Time-Delay Feedback / X.F. Wang, G.Chen, and X.Yu // *Chaos.* – 2000. – V. 10. – P. 771 – 779.
199. *Wei H.L.* Forecasting the geomagnetic activity of the *Dst*-index using multiscale radial basis function networks / H.L. Wei, D.Q. Zhu, S.A. Billings, M.A. Balikhin // *Advances in Space Research.* – 2007. – V. 40. – P. 1863 – 1870.
200. *Weinstein L. A.* Open resonators and open waveguides / L. A. Weinstein. – Golem Press., 1969. – 439 p.
201. *White M.C.* The Evolution of organization: Suggestions from complexity theory about the interplay between natural selection and adaptation / M.C. White, D.B. Marin, D.V. Brazeal, W.H. Friedman // *Human Relations.* – 1997. – V. 50. – P. 1383 –1401.
202. *Yatsenko V.A.* Geometric Models, Fiber Bundles, and Biomedical Applications / V.A. Yatsenko, P.M. Pardalos, J.C. Sackellares and others // *Proceedings of the International Conference on Symmetry in Nonlinear*

Mathematical Physics, Institute of Mathematics. – 2004. – V. 3. – P. 1518 – 1525.

203. *Yatsenko V.* Space Weather Influence on Power Systems: Prediction, Risk Analysis, and Modeling / V. Yatsenko, N. Boyko, S. Rebennack, P. Pardalos // Energy Systems. – 2010. – V. 1. – P.197 –207.
204. *Yermolaev, Yu.I.* Statistic study on the geomagnetic storm effectiveness of solar and interpolary events / Yu. I. Yermolaev, M. Yu Yermolaev //Advances in Space research. – 2006. – V. 37, Issue 6. – P 1175 – 1181.
205. *Yu Z.G.* Chaos game representation of the *Dst*-index and prediction of geomagnetic storm events / Z.G. Yu, V.V. Anh, J.A. Wanliss, S.M. Watson // Chaos Soliton. Fract. – 2007. – V. 31. – P. 736 – 746.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ АВТОРА

- 1^a *Ладиков-Роев Ю.П.* О распределении плазменного давления в экваториальной области магнитосферы Земли / Ю.П. Ладиков-Роев, С.О. Черемных // *Космічна наука і технологія.* – 2010. – Т.16, №1. – С. 86 – 89.
- 2^a *Черемних С.О.* Прогнозування геомагнітного Dst-індексу на базі білінійних моделей та методів нелінійної фільтрації / С.О. Черемних, В.О Яценко // *Наукові записки НаУКМА.– Сер. Фіз-мат.* – 2011. – С.65 – 71.
- 3^a *Cheremnykh S.O.* MHD waves in the plasma system with dipole magnetic field configuration / S.O. Cheremnykh, O.V. Agapitov // *Advances in Astronomy and Space Physics.* – 2011. – V.2. – P. 103 – 106.
- 4^a *Семенів О.В.* Прогнозування космічної погоди на основі адаптивної процедури статистичного навчання / О.В. Семенів, В.О. Яценко, С.О. Черемних // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія фізико-математичні науки.* – 2012. – Т. 3. – С. 233 – 238.
- 5^a *Ladikov-Roey Yu.P.* Axisymmetric force free magnetic configurations in plasma flux / Yu.P. Ladikov-Roey, S.O. Cheremnykh, V.A. Yatsenko // *Journal of Automation and Information Sciences.* – 2013. – V. 3. – P.74 – 83.
- 6^a *Cheremnykh S.O.* Damping of magnetospheric toroidal Alfvén eigenmodes due to phase mixing / S.O. Cheremnykh, O.S. Parnovski // *Advances in Astronomy and Space Physics.* – 2013. – V3. – P. 58 – 62.
- 7^a *Черемных С.О.* О поляризации поперечно-мелкомасштабных МГД-мод в магнитосфере Земли / С.О. Черемных // *Космічна наука і технологія.* – 2013. – Т.19, № 4. – С. 57 – 64.
- 8^a *Яценко В.О.* Лінійний і нелінійний аналіз часового ряду: кореляційна

- розмірність, показники Ляпунова та прогнозування / В.О. Яценко, О.І. Кочкодан, М.В. Макаричев, С.О. Черемних, І.С. Пашенковська // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – 2013. – №4. – С. 84 – 89.
- 9^a *Черемных О.К.* Исследования МГД колебаний внутренней магнитосферы Земли в космическом проекте “Резонанс” / О.К. Черемных, Ю.М. Ямпольский, А.В. Агапитов, А.В. Зализовский, В.Н. Ивченко, Л.В. Козак, А.С. Парновский, Ю.Г. Рапопорт, Ю.А. Селиванов, А.В. Колосков, С.О. Черемных // Космическая наука и технология. – 2013 . – Т. 19, № 2. – С.5 – 42.
- 10^a *Яценко В.О.* Ідентифікація білінійних систем та керування показниками Ляпунова / В.О. Яценко, О.І. Кочкодан, М.В. Макаричев, І.С. Пашенковська, С.О. Черемних, О.В. Шолохов // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – 2014.– №4. – С. 247-250.
- 11^a *Черемних О.К.* Експериментальні та теоретичні дослідження резонансних явищ в магнітосферно-іоносферній плазмі/ О.К. Черемних, А.К. Федоренко, Є.І. Крючков, С.О. Черемних, А.В. Беспалова // Космічна наука та технологія. – 2015. – Т. 21, №1. – С.64 – 69.
- 12^a *Сорока С.О.* Вплив космічних факторів на атмосферу та іоносферу. Створення технічних засобів для локального моніторингу інфразвуку: зб. наук. звітів. / С.О. Сорока, В.О. Яценко, В.П. Мезенцев, Л.П. Каратаєва, О.В. Семенів, С.О. Черемних, Ю.В. Шатохіна // Цільова комплексна програма фундаментальних досліджень «Наукові основи, методичне, технічне та інформаційне забезпечення створення системи моніторингу геосистем на території України (GEO-UA). – К.: НАН України. – 2010. – С. 60 – 70.
- 13^a *Яценко В.О.* Дослідження впливу факторів космічної погоди на супутникові прилади та системи: зб. наук. звітів / В.О. Яценко, Ю.О.

- Кліменко, В.Є. Набівач, Л.В. Підгородецька, Ю.В. Пруцко, О.В. Семенів, С.О. Черемних // Цільова комплексна програма фундаментальних досліджень «Наукові основи, методичне, технічне та інформаційне забезпечення створення системи моніторингу геосистем на території України (GEO-UA). – К.: НАН України. – 2010. – С. 136-148.
- 14^a *Yatsenko V.A.* Geomagnetic Dst index forecast based on bilinear models and nonlinear filtering techniques / V.A. Yatsenko, S.O. Cheremnykh, Yu.V. Prutsko // 10th Ukrainian Conference on Space Research: Abstracts. – Yevpatoria, Ukraine, 2010. – P. 108.
- 15^a *Cheremnykh S.O.* MHD waves in the plasma system with dipole magnetic field configuration / S.O. Cheremnykh, O.V. Agapitov // Young Scientists Conference “Modern Problems of Theoretical Physics” : Abstracts. – Kyiv, Ukraine, 2010. – P.103.
- 16^a *Черемных С.О.* УНЧ волни в плазме с дипольным магнитным полем / С.О.Черемных, О.В. Агапитов // 11я Украинская конференция по космическим исследованиям : тезисы докл. – Евпатория, Украина, 2011. – С. 51.
- 17^a *Yatsenko V.A.* Geomagnetic Dst Index Forecast Based on Bilinear Models and Nonlinear Filtering Techniques / V.A. Yatsenko, S.O. Cheremnykh // UK–Ukraine Meeting on Solar Physics and Space Science joint with Topical Advanced Summer School UKU SPSS/TASS : Abstracts. – Alushta, Ukraine, 2011.– P.11
- 18^a *Yatsenko V.A.* Dynamical approach to space weather prediction using identification and optimization methods / V.A. Yatsenko, S.O. Cheremnykh // 12th Ukrainian Conference on Space Research : Abstracts. – Yevpatoria, Ukraine, 2012. – P. 58.
- 19^a *Черемних С.О.* Осесимметричні безсилові плазмові конфігурації у плазмовому потоці / С.О. Черемних // 13я Украинская конференция по

космическим исследованиям : тезисы докл. – Евпатория, Украина, 2013. – С. 43.

- 20^a Черемних С.О. Про поляризацію поперечно-дрібномасштабних МГД-хвиль в магнітосфері Землі / Черемних С.О. // 13я Украинская конференция по космическим исследованиям : тезисы докл. – Евпатория, Украина, 2013. – С. 63.
- 21^a Ладиков-Роев Ю.П. Моделирование осесимметричных бессиловых магнитных конфигураций в плазменном потоке/ Ю.П. Ладиков-Роев, С.О. Черемных, В.А. Яценко // Обчислювальна та прикладна математика : VII Міжнародна наукова конференція імені академіка І.І.Ляшка, 9 - 10 жовтня : тезисы докл. – Київ, 2014 г. – С. 65.

Приложение 1. Получение уравнений (2.41) и (2.42)

Для получения уравнений (2.41) и (2.42), кроме уравнений (2.35),(2.38)-(2.40), нам понадобится следующее равенство

$$\operatorname{rot} \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} \left(\operatorname{div} \left(|\vec{B}|^2 \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right) + p' \right) + \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} S, \quad (\text{п. 1.1})$$

которое получим ниже. Представим $\operatorname{rot} \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2}$ в виде

$$\operatorname{rot} \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \equiv \vec{R} = R_1 \nabla \psi + R_2 \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} - R_3 \vec{B}.$$

Откуда находим R_1 , R_2 и R_3 :

$$\begin{aligned} \vec{R} \cdot \nabla \psi &= R_1 |\nabla \psi|^2, \quad R_1 = \frac{(\vec{R} \cdot \nabla \psi)}{|\nabla \psi|^2}, \quad \vec{R} \cdot \nabla \psi = \operatorname{rot} \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \cdot \nabla \psi = \\ &= \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \cdot \operatorname{rot} \nabla \psi - \operatorname{div} \left(\nabla \psi \times \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \right) = -\operatorname{div} \left(\vec{B} \frac{|\nabla \psi|^2}{|\nabla \psi|^2} - \frac{\nabla \psi \cdot (\nabla \psi \cdot \vec{B})}{|\nabla \psi|^2} \right) = \\ &= -\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad R_1 = 0. \end{aligned}$$

$$\vec{R} \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi] = R_2 \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi] \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} = \frac{|\vec{B}|^2 \cdot |\nabla \psi|^2}{|\nabla \psi|^2} R_2 = R_2 |\vec{B}|^2,$$

$$R_2 = \frac{\vec{R} \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2}, \quad \vec{R} \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi] = \left(\operatorname{rot} \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \right) \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi].$$

$$R_2 = \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} \cdot \operatorname{rot} \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2}.$$

$$\begin{aligned}
\vec{R} \cdot \vec{B} &= -R_3 |\vec{B}|^2, R_3 = -\frac{\vec{R} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|^2}, \vec{R} \cdot \vec{B} = \operatorname{rot} \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \cdot \vec{B} = \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \operatorname{rot} \vec{B} + \\
&+ \operatorname{div} \frac{[[\vec{B} \times \nabla \psi] \times \vec{B}]}{|\nabla \psi|^2} = \frac{\vec{j} \cdot [\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} + \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \psi \cdot |\vec{B}|^2}{|\nabla \psi|^2} - \frac{\vec{B} \cdot (\vec{B} \cdot \nabla \psi)}{|\nabla \psi|^2} \right) = \\
&= \frac{[\vec{j} \times \vec{B}] \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} + \operatorname{div} \left(\frac{|\vec{B}|^2 \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right), \quad R_3 = -\frac{p' + \operatorname{div} (|\vec{B}|^2 \nabla \psi / |\nabla \psi|^2)}{|\vec{B}|^2}.
\end{aligned}$$

В результате получаем уравнение (п. 1.1):

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} &= 0 \cdot \nabla \psi + \left(\frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \cdot \operatorname{rot} \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \right) \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} + \\
&+ \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} \left(\operatorname{div} \left(\frac{|\vec{B}|^2 \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right) + p' \right) = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} \left(\operatorname{div} \left(\frac{|\vec{B}|^2 \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right) + p' \right) + \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\vec{B}|^2} S.
\end{aligned}$$

С помощью (п. 1.1) получаем интересующие нас уравнения (2.41) и (2.42).

$$\begin{aligned}
[\vec{b} \times \vec{j}] &= \left[\left(\frac{Q_1 \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right) \times \vec{j} \right] + \left[\left(\frac{Q_2 [\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \right) \times \vec{j} \right] + \left[\left(\frac{Q_3 \vec{B}}{|\vec{B}|^2} \right) \times \vec{j} \right] = \\
Q_1 \frac{[\nabla \psi \times \vec{j}]}{|\nabla \psi|^2} &+ \frac{Q_2}{|\nabla \psi|^2} (\nabla \psi \cdot (\vec{j} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{j} \cdot \nabla \psi)) - \frac{Q_3}{|\vec{B}|^2} [\vec{j} \times \vec{B}] = \\
= Q_1 \frac{[\nabla \psi \times \vec{j}]}{|\nabla \psi|^2} &+ \frac{Q_2}{|\nabla \psi|^2} \nabla \psi (\vec{j} \cdot \vec{B}) - \frac{Q_3}{|\vec{B}|^2} \nabla p = Q_1 \frac{[\nabla \psi \times \vec{j}]}{|\nabla \psi|^2} - \frac{Q_3}{|\vec{B}|^2} p' \nabla \psi, \\
[\vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{b}] &= \left[\vec{B} \times \operatorname{rot} \left(\frac{Q_1 \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right) \right] + \left[\vec{B} \times \operatorname{rot} \left(\frac{Q_2 [\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\vec{B} \times \text{rot} \left(\frac{Q_3 \vec{B}}{|\vec{B}|^2} \right) \right] = \left[\vec{B} \times \left[\nabla \left(\frac{Q_1}{|\nabla \psi|^2} \right) \times \nabla \psi \right] \right] + \left[\vec{B} \times \left(\frac{Q_1}{|\nabla \psi|^2} \text{rot} \nabla \psi \right) \right] + \\
& + \left[\vec{B} \times \left[\nabla Q_2 \times \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \right] \right] + Q_2 \left[\vec{B} \times \text{rot} \left(\frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \right) \right] + \left[\vec{B} \times \left[\nabla \left(\frac{Q_3}{|\vec{B}|^2} \right) \times \vec{B} \right] \right] - \\
& - \frac{Q_3}{|\vec{B}|^2} [\vec{j} \times \vec{B}] = \nabla \left(\frac{Q_1}{|\nabla \psi|^2} \right) \cdot (\vec{B} \cdot \nabla \psi) - \nabla \psi \left(\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{Q_1}{|\nabla \psi|^2} \right) \right) + \\
& + \nabla Q_2 \left(\vec{B} \cdot \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \right) - \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} (\vec{B} \cdot \nabla Q_2) + Q_2 \left[\vec{B} \times \text{rot} \left(\frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \right) \right] + \\
& + \nabla \left(\frac{Q_3}{|\vec{B}|^2} \right) \cdot |\vec{B}|^2 - \vec{B} \left(\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{Q_3}{|\vec{B}|^2} \right) \right) - \frac{Q_3}{|\vec{B}|^2} \nabla p = -\nabla \psi \left(\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{Q_1}{|\nabla \psi|^2} \right) \right) - \\
& - \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} (\vec{B} \cdot \nabla Q_2) + Q_2 \frac{(\vec{B} \times \vec{B})}{|\vec{B}|^2} \left(\text{div} \left(\frac{|\vec{B}|^2 \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} \right) + p' \right) + \\
& + Q_2 \left[\left(\frac{[\vec{B} \times [\vec{B} \times \nabla \psi]]}{|\nabla \psi|^2} S \right) \right] + \left(\frac{\nabla Q_3}{|\vec{B}|^2} - \frac{Q_3 \nabla |\vec{B}|^2}{|\vec{B}|^4} \right) |\vec{B}|^2 - \\
& - \vec{B} \left(\vec{B} \cdot \left(\frac{\nabla Q_3 \cdot |\vec{B}|^2}{|\vec{B}|^4} - \frac{Q_3 \cdot \nabla |\vec{B}|^2}{|\vec{B}|^4} \right) \right) - \frac{Q_3}{|\vec{B}|^2} \nabla p = -\nabla \psi \left(\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{Q_1}{|\nabla \psi|^2} \right) \right) - \\
& - \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} (\vec{B} \cdot \nabla Q_2) + \nabla Q_3 - \frac{Q_3 \nabla |\vec{B}|^2}{|\vec{B}|^4} - \vec{B} \left(\vec{B} \cdot \frac{\nabla Q_3}{|\vec{B}|^2} \right) - \frac{Q_3}{|\vec{B}|^2} \nabla p.
\end{aligned}$$

Приложение 2. Получение уравнений (2.43), (2.44)-(2.46), (2.51)

Для получения уравнений (2.43), (2.44)-(2.46), (2.51) представим уравнение малых колебаний в виде

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho \vec{\xi} = & \nabla \delta p_1 - \nabla Q_3 + \frac{Q_1}{|\nabla \psi|^2} [\nabla \psi \times \vec{j}] + \frac{Q_2}{|\nabla \psi|^2} \nabla \psi (\vec{j} \cdot \vec{B}) - \\ & \nabla \psi \left(\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{Q_1}{|\nabla \psi|^2} \right) \right) - \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} (\vec{B} \cdot \nabla Q_2) + \nabla Q_3 - 2 \frac{Q_3 \nabla (2p + |\vec{B}|^2)}{2|\vec{B}|^2} + \\ & + 2Q_3 \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^4} (\vec{B} \cdot \nabla) \frac{|\vec{B}|^2}{2} - \vec{B} \left(\frac{\vec{B} \cdot \nabla Q_3}{|\vec{B}|^2} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что вектор кривизны силовой линии магнитного поля $\vec{\chi}$ равен

$$\vec{\chi} \equiv \left(\frac{\vec{B}}{B} \nabla \right) \frac{\vec{B}}{B} = \frac{\nabla (2p + |\vec{B}|^2)}{2|\vec{B}|^2} - \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^4} (\vec{B} \nabla) \frac{|\vec{B}|^2}{2},$$

получаем уравнение

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho \vec{\xi} = & \nabla \delta p_1 + \frac{Q_1}{|\nabla \psi|^2} [\nabla \psi \times \vec{j}] + \frac{Q_2}{|\nabla \psi|^2} \nabla \psi (\vec{j} \cdot \vec{B}) - \nabla \psi \left(\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{Q_1}{|\nabla \psi|^2} \right) \right) - \\ & - \frac{[\vec{B} \times \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} (\vec{B} \cdot \nabla Q_2) - 2Q_3 \vec{\chi} - \vec{B} \left(\frac{\vec{B} \cdot \nabla Q_3}{|\vec{B}|^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{п. 2.1})$$

Тогда проекцию малых уравнений (п.2.1) на направление $\nabla \psi$ представим в виде:

$$\omega^2 \rho \xi = \nabla \psi \cdot \nabla \delta p_1 + \frac{Q_1}{|\nabla \psi|^2} \nabla \psi \cdot [\nabla \psi \times \vec{j}] + Q_2 (\vec{j} \cdot \vec{B}) - |\nabla \psi|^2 \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{Q_1}{|\nabla \psi|^2} \right) -$$

$$-\frac{\nabla\psi \cdot [\vec{B} \times \nabla\psi]}{|\nabla\psi|^2} \cdot (\vec{B} \cdot \nabla Q_2) - 2Q_3 \vec{\chi} \cdot \nabla\psi - (\vec{B} \cdot \nabla\psi) \left(\frac{\vec{B} \cdot \nabla Q_3}{|\vec{B}|^2} \right) = \nabla\psi \cdot \nabla \delta p_1 -$$

$$-|\nabla\psi|^2 \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{Q_1}{|\nabla\psi|^2} \right) - 2(\vec{\chi} \cdot \nabla\psi) Q_3.$$

Учитывая, что полное возмущённое давление δp_1 плазмы равно

$$\delta p_1 = \delta p + Q_3 = -\gamma p \operatorname{div} \vec{\xi} - |\vec{B}|^2 \left(\operatorname{div} \vec{\xi}_\perp + 2\vec{\chi} \cdot \vec{\xi}_\perp \right),$$

окончательно получаем

$$\nabla\psi \cdot \nabla \delta p_1 = \omega^2 \rho \xi + |\nabla\psi|^2 \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{Q_1}{|\nabla\psi|^2} \right) + 2(\vec{\chi} \cdot \nabla\psi) (\delta p_1 + p' \xi + \gamma \operatorname{div} \vec{\xi}). \quad (\text{п. 2.2})$$

Найдём теперь проекцию (п.2.1) на направление $[\vec{B} \times \nabla\psi]$:

$$\omega^2 \rho \vec{\xi} \cdot [\vec{B} \times \nabla\psi] = \omega^2 \rho |\nabla\psi|^2 \eta = [\vec{B} \times \nabla\psi] \cdot \nabla \delta p_1 + [\operatorname{rot} [\vec{\xi} \times \vec{B}] \times \vec{j}] \cdot [\vec{B} \times \nabla\psi] +$$

$$+ [\vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{b}] \cdot [\vec{B} \times \nabla\psi] = [\vec{B} \times \nabla\psi] \delta \nabla p + (\operatorname{rot} [\vec{\xi} \times \vec{B}] \cdot \vec{B}) (\vec{j} \cdot \nabla\psi) -$$

$$- (\vec{B} \cdot \vec{j}) \cdot (\operatorname{rot} [\vec{\xi} \times \vec{B}] \cdot \nabla\psi) + |\vec{B}|^2 \cdot (\operatorname{rot} \vec{b} \cdot \nabla\psi) - (\vec{B} \cdot \nabla\psi) (\operatorname{rot} \vec{b} \cdot \vec{B}) =$$

$$= [\vec{B} \times \nabla\psi] \cdot \nabla \delta p_1 + |\vec{B}|^2 \operatorname{div} [\vec{b} \times \nabla\psi] - |\vec{B}|^2 \operatorname{rot} (\nabla\psi \cdot \vec{B}) = [\vec{B} \times \nabla\psi] \cdot \nabla \delta p_1 +$$

$$+ |\vec{B}|^2 \operatorname{div} \left(\frac{Q_1 [\nabla\psi \times \nabla\psi]}{|\nabla\psi|^2} + \frac{Q_2 [\vec{B} \times \nabla\psi] \times \nabla\psi}{|\vec{B}|^2} + \frac{Q_3 [\vec{B} \times \nabla\psi]}{|\vec{B}|^2} \right) = [\vec{B} \times \nabla\psi] \cdot \nabla \delta p_1 +$$

$$+ |\vec{B}|^2 \operatorname{div} \left(Q_2 \frac{\nabla\psi (\nabla\psi \cdot \vec{B}) - \vec{B} |\nabla\psi|^2}{|\vec{B}|^2} \right) + |\vec{B}|^2 \frac{Q_3}{|\vec{B}|^2} \operatorname{div} [\vec{B} \times \nabla\psi] = [\vec{B} \times \nabla\psi] \cdot \nabla \delta p_1 -$$

$$- |\vec{B}|^2 (\vec{B} \cdot \nabla) Q_2 = [\vec{B} \times \nabla\psi] \cdot \nabla \delta p_1 - |\vec{B}|^2 (\vec{B} \cdot \nabla) \left(|\nabla\psi|^2 / |\vec{B}|^2 \vec{B} \cdot \nabla \eta \right).$$

Следовательно, проекцию уравнения (п.2.1) на направление $[\vec{B} \times \nabla\psi]$ можно записать в виде

$$\left[\vec{B} \times \nabla \psi \right] \cdot \nabla \delta p_1 = \omega^2 \rho |\nabla \psi|^2 \eta + |\vec{B}|^2 \left(\vec{B} \cdot \nabla \right) \left(\frac{|\nabla \psi|^2}{|\vec{B}|^2} \vec{B} \cdot \nabla \eta \right). \quad (\text{п. 2.3})$$

Теперь определим проекцию уравнения малых колебаний (п. 2.1) на направление \vec{B} :

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho \tau &= \vec{B} \cdot \nabla \delta p_1 + \vec{B} \cdot [\vec{b} \times \vec{j}] + \vec{B} \cdot [\vec{B} \times \text{rot} \vec{b}] = \vec{B} \cdot \nabla \delta p_1 - \vec{b} \cdot [\vec{j} \times \vec{B}] + \\ &+ [\vec{B} \times \vec{B}] \cdot \text{rot} \vec{b} = \vec{B} \cdot \nabla \delta p_1 + \vec{b} \cdot \nabla p, \end{aligned}$$

т.е. получаем уравнение

$$\vec{B} \cdot \nabla \delta p = \omega^2 \rho \tau - \vec{b} \cdot \nabla p. \quad (\text{п. 2.4})$$

Подставляем в (п.2.4) выражение для δp из (2.35), находим

$$\omega^2 \rho \tau - \vec{b} \cdot \nabla p = -\vec{B} \cdot \nabla (\vec{\xi} \nabla p + \gamma p \text{div} \vec{\xi}). \quad (\text{п. 2.5})$$

Перепишем уравнение (п.2.5) в следующем виде

$$\omega^2 \rho \tau + \gamma p \vec{B} \cdot \nabla \text{div} \vec{\xi} = \vec{b} \cdot \nabla p - \vec{B} \cdot \nabla (\vec{\xi} \cdot \nabla p).$$

Правая часть уравнения равна нулю, действительно

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot \nabla p - \vec{B} \cdot \nabla (\vec{\xi} \cdot \nabla p) &= \text{rot} [\vec{\xi} \times \vec{B}] \cdot \nabla p - \vec{B} \cdot \nabla (\vec{\xi} \cdot \nabla p) = \text{div} \left[[\vec{\xi} \times \vec{B}] \times \nabla p \right] - \\ &- [\vec{\xi} \times \vec{B}] \cdot \text{rot} \nabla p - \vec{B} \cdot \nabla (\vec{\xi} \cdot \nabla p) = -\text{div} \left(\vec{\xi} \cdot (\vec{B} \cdot \nabla p) - \vec{B} \cdot (\nabla p \cdot \vec{\xi}) \right) - \vec{B} \cdot \nabla (\vec{\xi} \cdot \nabla p) = \\ &= \text{div} \left(\vec{B} \cdot (\nabla p \cdot \vec{\xi}) \right) - \vec{B} \cdot \nabla (\vec{\xi} \cdot \nabla p) = \vec{B} \cdot \nabla (\vec{\xi} \cdot \nabla p) - (\nabla p \cdot \vec{\xi}) \text{div} \vec{B} - \vec{B} \cdot \nabla (\vec{\xi} \cdot \nabla p) = 0. \end{aligned}$$

Окончательно получаем уравнение

$$\omega^2 \rho \tau + \gamma p \vec{B} \cdot \nabla \text{div} \vec{\xi} = 0, \quad (\text{п. 2.6})$$

которое замыкает систему уравнений малых колебаний для УНЧ мод.

Приложение 3. Приведение нелинейной системы типа «чёрный ящик» к билинейному виду

Для изучения реакции магнитосферы, как целого (системы), на изменяющиеся параметры солнечного ветра в подразделе 2.4 было предложено использовать модель “черного ящика”. Последнюю можно охарактеризовать неким “входом” для учета воздействия солнечного ветра и “выходом” – для отображения результатов измерения Dst-индекса. Состояние “выходов” функционально зависит от состояния “входов”. Эта зависимость описывается следующей системой уравнений [143, 161]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x) + \sum_i u_i(t)g_i(x), \\ y(t) &= h(x) + \sum_j v_j(t)q_j(x). \end{aligned} \quad (\text{п. 3.1})$$

Здесь x – вектор состояния системы, y – вектор выходного сигнала, u_i – компоненты вектора управления $u(t)$, v_j – компоненты вектора $v(t)$, описывающего влияние помех на динамическую систему, $f(x)$, $h(x)$ – некоторые векторные функции x , g и q – матричные функции соответствующих размерностей. Первое уравнение в (п. 3.1) описывает динамику состояния системы с учётом управления (воздействия), а второе – связь выходного сигнала системы с её состоянием.

Представим фигурирующие в (п. 3.1) и зависящие от x величины в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= Ax, & g_i(x) &= B_i x, \\ h(x) &= Cx, & q_i(x) &= D_i x, \end{aligned} \quad (\text{п. 3.2})$$

где A , C , B_i , D_i – постоянные матрицы соответствующих размерностей. В результате система (п. 3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left(A + \sum_i u_i(t) B_i \right) x(t), \\ y(t) &= \left(C + \sum_j v_j(t) D_j \right) x(t) \end{aligned} \quad (\text{п. 3.3})$$

и в случае $v_j = 0$ может быть переписана в виде билинейной системы (2.64).

Выбор (п. 3.2) совершенно не обязателен. Если для системы (п. 3.1), с учетом ее особенностей, можно предложить лучший (более простой) выбор, то, безусловно, ему можно отдать предпочтение. С другой стороны приближение (п. 3.2) является приближением минимальной сложности и поэтому билинейные модели являются простейшим классом нелинейных моделей для систем типа «чёрный ящик», обобщающих линейные модели.

Отметим, что переход от (п. 3.1) к (п. 3.3) можно описать более последовательно с использованием алгебры Ли. Детали такого перехода можно найти в монографии [161].