

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І.І. МЕЧНИКОВА
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Троянський Володимир Володимирович

УДК 523.4

ДИСЕРТАЦІЯ
ДИНАМІКА ОБРАНИХ ПОДВІЙНИХ І КРАТНИХ
МАЛИХ ТІЛ СОНЯЧНОЇ СИСТЕМИ

01.03.01 – Астрометрія і небесна механіка
Фізика та астрономія

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень.

Використання ідей, результатів і текстів інших
авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ (В.В. Троянський)

Науковий керівник
Базей Олександр Анатолійович,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри теоретичної фізики та астрономії

Одеса – 2017

АНОТАЦІЯ

Троянський В.В. Динаміка обраних подвійних і кратних малих тіл Сонячної системи. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.03.01 "Астрометрія і небесна механіка" (104 – Фізика та астрономія). – Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Національний авіаційний університет, Київ, 2017.

Робота присвячена дослідженню динаміки супутників в подвійних і кратних системах малих тіл. Основою дослідження є унікальне комп'ютерне моделювання, виконане автором, а також отримані на телескопі ОМТ-800 НДІ "Астрономічна обсерваторія" ОНУ імені І.І. Мечникова астрометричні спостереження астероїдів в навколосемному просторі. В роботі використані аналітичні розрахунки стійкості руху супутників в подвійних і потрійних астероїдних системах.

Метою дисертаційної роботи є вивчення динаміки супутників астероїдів, реалізація методик визначення коефіцієнтів розкладання гравітаційного поля компонентів астероїдних систем та дослідження внеску періодичних і вікових збурень в еволюцію орбіт астероїдних систем.

Основні методи дослідження – астрометричні оптичні спостереження астероїдів, комп'ютерне моделювання руху в подвійних і кратних астероїдних системах на основі чисельного інтегрування рівнянь руху в координатах методом Еверхарта п'ятнадцятого порядку. Для інтерпретації отриманих величин застосовувався періодограмний аналіз.

Впроваджено нове програмне забезпечення для пошуку невідомих об'єктів Сонячної системи, що дозволило підвищити проникну здатність телескопа ОМТ-800 з 19^m до 21^m . В результаті оглядових спостережень подвійних і кратних малих тіл Сонячної системи, було відкрито два малих тіла, одне з яких ідентифіковано як раніше загублений астероїд.

Розраховані умови розриву для 168 подвійних і кратних малих тіл Сонячної системи.

Знайдено 10 орбітальних, 26 спін-орбітальних і 28 спін-спінових резонансів в обраних подвійних і кратних системах малих тіл.

Вперше обчислені: маса, велика піввісь орбіти, орбітальний період, резонанси, гіпотетичного супутника-пастуха астероїда (10199) Chariklo.

Вперше обчислені 5 коефіцієнтів розкладання по сферичним функціям потенціалу гравітаційного поля обраних компонентів астероїдних систем. Не всі значення збігаються з отриманими раніше результатами попередніх робіт. Це може бути пов'язано з відмінністю вихідних даних та методами їх отримання.

Побудована чисельна модель руху в системах подвійних та кратних малих тіл Сонячної системи. В моделі враховано тяжіння Сонця та великих планет, асиметрію малих тіл, тиск сонячного світла з урахуванням тіньової функції. Модель дозволила виявити деякі особливості еволюції орбіт супутників.

Чисельна модель апробована на подвійних і кратних малих тілах Сонячної системи: (45) Eugenia, (87) Sylvia, (90) Antiope, (66391) 1999 KW4, (134340) Pluto, (136108) Haumea, (136617) 1994 CC, (153591) 2001 SN263, (385446) Manwe. Отримані зміни Кеплерових елементів орбіт на інтервалі 100 років і 1000 років в цілому підтверджують результати, отримані іншими авторами. Знайдено вікові зміни в деяких Кеплерових елементах орбіт супутників. У всіх елементах орбіт обчислені величини періодичних змін і запропоновані можливі причини їх походження. Так само знайдені однакові періодичні коливання в Кеплерових елементах орбіт одного і того ж супутника.

На основі побудованої моделі астероїдної системи стало можливим отримання фотометричних характеристик системи, які спостерігаються з Землі. Порівняння кривих блиску астероїдних систем з модельними значеннями дозволить виявити особливості будови і фізичних властивостей поверхонь малих тіл.

Ключові слова: астероїдна система, супутник-пастух, резонанси в астероїдних системах, еволюція орбіт супутників астероїдів.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Troianskyi V.V. Method for calculating orbits of near-Earth asteroids observed with telescope OMT-800 / V.V. Troianskyi, O.A. Bazyey, V.I. Kashuba, V.V. Zhukov, S.O. Korzhavin // *Odessa Astronomical Publications*. – 2014. – Vol. 27(2). – P. 154-155.
2. Troianskyi V.V. Determination of the small Solar system bodies orbital elements from astrometric observations with OMT-800 telescope / V.V. Troianskyi, O.A. Bazyey, V.I. Kashuba, V.V. Zhukov // *Third Gaia Fun SSO "Gaia Follow-up Network for Solar System Objects"*. – Paris: IMCCE. – 2015. – Vol. 3. – P. 127-130.
3. Troianskyi V.V. The Solar-radiation pressure effects on the orbital evolution of asteroid moons / V.V. Troianskyi, O.A. Bazyey // *Odessa Astronomical Publications*. – 2015. – Vol. 28(1). – P. 76-77.
4. Troianskyi V.V. The impact of the non-sphericity of the gravitational field of the asteroid on the evolution of the orbits of its satellites / V.V. Troianskyi // *Odessa Astronomical Publications*. – 2015. – Vol. 28(2). – P. 299-303.
5. Troianskyi V.V. Disintegration's condition of binary and multiple asteroids under the action of tidal forces Major Solar system planets / Troianskyi V.V., Radchenko K.O., Bazyey O.A. // *Astronomical School's Report*. – 2015. – Vol. 11(2). – P. 145-156.
6. Troianskyi V.V. Resonances in the asteroids systems / V.V. Troianskyi // *Odessa Astronomical Publications*. – 2016. – Vol. 29. – P. 221-223.
7. Troianskyi V.V. Dynamics of the asteroid rings (10199) Chariklo / Troianskyi V.V., Bazyey O.A. // *Astronomical School's Report*. – 2016. – Vol. 12(2). – P. 122-124.
8. Bonomi R. Observations and Orbits of Comets / Bonomi R., Facchini M., Negrelli P [...] Troianskyi V. [...] // *Minor Planet Electronic Circ.* – 2014, 2015, 2016, 2017. No.2015-J41, No.2015-Q71, No.2015-U54, No.2015-H37, No.2015-E14, No.2015-N31, No. 2016-Q04, No. 2016-M09, No. 2016-K18, No. 2017-A77.

9. Троянский В.В. Эволюция орбит тройных астероидов 1994 CC и 2001 SN263, сближающихся с Землей / Троянский В.В., Базей А.А. // XVI Міжнародна наукова конференція "Астрономічна школа молодих вчених". Програма і тези доповідей. Кіровоград. – 2014. – С. 65.

10. Троянский В.В. Методика обработки наблюдений и прогнозирование движения астероидов сближающихся с Землей по данным телескопа ОМТ-800 / Троянский В.В., Базей А.А., Кашуба В.И., Жуков В.В. // 14-th Odessa International Astronomical Gamow Conference-School "Astronomy and beyond: Astrophysics, Cosmology and Gravitation, Cosmomicrophysics, Radioastronomy and Astrobiology". Program and abstracts. Odessa. – 2014. – P. 50.

11. Троянский В.В. Эволюция ретроградных орбит спутников двойных и кратных астероидов из группы AC3 / Троянский В.В., Базей А.А. // 14-th Ukrainian conference on space research. Abstracts. Kyiv. – 2014. – P. 35.

12. Троянский В.В. Области устойчивого движения на орбитах спутников двойных и кратных астероидов сближающихся с Землей / Троянский В.В., Базей А.А. // VI Memorial International conference "САММАС-2014". Book of selected papers and abstracts. Vinnytsia. – 2014. – P. 88.

13. Троянский В.В. Орбитальный резонанс спутников астероидов сближающихся с Землей / Троянский В.В., Базей А.А. // Съома міжнародна наукова конференція "Вибрані питання астрономії та астрофізики". Програма та тези. Львів. – 2014. – С. 42.

14. Troianskyi V.V. The impact of the non-sphericity of the gravitational field of the asteroid on the evolution of the orbits of its satellites / V.V. Troianskyi, O.A. Bazyey // 22rd Young Scientists' Conference on Astronomy and Space Physics. Abstracts. Kyiv. – 2015. – P. 55.

15. Troianskyi V.V. Determination of small Solar system bodies orbital elements on astrometrical observations with OMT-800 telescope / V.V. Troianskyi, O.A. Bazyey, V.I. Kashuba, V.V. Zhukov // Gaia Fun SSO "Gaia Follow-up Network for Solar System Objects" #3. Programe and Abstracts. – Paris. – 2014. – P. 22.

16. Радченко К.О. Кратні астероїди головного поясу як елементи для утворення ретроградних супутників планет-гігантів / Радченко К.О., Троянський В.В. // XVII Міжнародна наукова конференція "Астрономічна школа молодих вчених". Програма і тези доповідей. Житомир. – 2015. – С. 67.
17. Troianskyi V. Dynamics of binary and triple asteroids / V. Troianskyi // International scientific and methodological conference "KOLOS 2015". Book of abstracts. Stakcin. – 2015. – P.6.
18. Troianskyi V. Numerical simulation of binary and multiple asteroids system dynamics / V. Troianskyi, O. Bazyey // XVI Odessa International Astronomical Gamow Conference-School "Astronomy and beyond: Astrophysics, Cosmology and Gravitation, Cosmomicrophysics, Radioastronomy and Astrobiology". Abstracts Book. Odessa. – 2016. – С. 39.
19. Troianskyi V. Numerical simulation of binary and multiple asteroids system dynamics / V. Troianskyi, O. Bazyey // Actual Questions of Ground-based Observational Astronomy "MAO-195". Mykolaiv. – 2016. – P. 25.
20. Горбачова А. Числова модель руху супутників карликової планети (134340) PLUTO / А. Горбачова, В. Троянський, О. Базей // VIII наукова конференція "Вибрані питання астрономії та астрофізики". Програма та тези. Львів. – 2016. С. – 45.
21. Troianskyi V. Dynamics of multiple system Pluto / Troianskyi V., Bazyey O., Zhukov V. // International scientific and methodological conference "KOLOS 2015". Book of abstracts. Stakcin. – 2016. – P.7.
22. Horbachova A. Dynamics of multiple system Pluto / Alice Horbachova, V. Troianskyi, O. A. Bazyey // 24rd Young Scientists' Conference on Astronomy and Space Physics. Abstracts. Kyiv. – 2017. – P. 46.
23. Троянский В. Резонанс Kozai в астероидных системах / Троянский В.В., Базей А.А. // XIX Міжнародна наукова конференція "Астрономічна школа молодих вчених". Програма і тези доповідей. Біла Церква. – 2017. – С. 76.

ABSTRACT

Troianskyi V.V. Dynamics of selected binary and multiple small Solar system bodies. – Qualifying scientific work as a manuscript.

The thesis of the Ph.D., specialty 01.03.01 "Astrometry and Celestial mechanics" (104 – Physics and astronomy). Odessa I.I.Mechnikov National University, National Aviation University, Kyiv, 2017.

This thesis devoted to research the dynamics of satellites in binary and multiple systems of small bodies. The basis of the study is the unique computer simulation performed by the author, and observations of asteroids in near-Earth space received on OMT-800 telescope in Astronomical Observatory of Odessa I.I. Mechnikov National University. In the thesis used an analytical calculation of stability of satellites movement in binary and triple asteroid systems.

The purpose of the thesis is to study the dynamics of satellites, asteroids, implementation methodologies of determination the expansion coefficients of the gravitational field of asteroid components and research contribution of periodic disturbances in the annual evolution of asteroid systems orbits.

The main methods: optical astrometric observations of asteroids, computer modeling of a binary and multiple asteroid systems based on numerical integration of the equations of motion in the coordinates by Everhart fifteenth order. For interpretation of the obtained values, periodogramial analysis used.

Implemented new software to search for unknown objects in the Solar system, thus improving penetrating capability of the telescope OMT-800 from 19 Mag to 21 Mag. As a result of survey observations of binary and multiple Solar system bodies two new small bodies was discovered. One of them identified as previously lost asteroid.

Conditions of systems gap calculated for 168 binary and multiple systems of Solar system small bodies.

10 orbital, 26 spin-orbital and 28 spin-spinal resonances founded in selected binary and multiple systems.

The first time calculated the mass, the semi-major axis, the orbital period, resonances of hypothetical shepherd satellite of the asteroid (10199) Chariklo.

The first time five coefficients of expansions of gravitational field in spherical functions calculated for selected asteroid systems. Not all values are consistent with results previously obtained in previous work. Probably this connected with difference of data and methods of obtaining them.

The numerical model of motion was built for systems of binary and multiple small bodies of the Solar system. The model takes into account gravity of the Sun and the major planets, small bodies' asymmetry, the sunlight pressure considering the shadow function. The model allows to find some of the features of the evolution of satellites orbits

The numerical model approbated on binary and multiple small bodies of the Solar system: (45) Eugenia, (87) Sylvia, (90) Antiope, (66391) 1999 KW4, (134340) Pluto, (136108) Haumea, (136617) 1994 CC, (153591) 2001 SN263, (385446) Manwe. Obtained changes Keplerian orbital elements for range 100 years and 1000 years generally confirms the results obtained by other authors. Annual changes in certain Keplerian orbital elements founded. For all orbital elements calculated values of periodical changes and suggested possible causes of their origin. Also, found in the same periodic oscillations in Keplerian orbital elements of the same satellite.

Based on the developed model of asteroid system became possible to obtain photometric characteristics of the system observed from Earth. Comparison of asteroid light curves with model values will identify structural features and physical properties of surfaces of small bodies.

Keywords: Asteroid system, satellite shepherd, resonances in asteroid systems, orbital evolution of asteroids satellites.

REFERENCES

1. Troianskyi V.V. Method for calculating orbits of near-Earth asteroids observed with telescope OMT-800 / V.V. Troianskyi, O.A. Bazyey, V.I. Kashuba, V.V. Zhukov, S.O. Korzhavin // *Odessa Astronomical Publications*. – 2014. – Vol. 27(2). – P. 154-155.
2. Troianskyi V.V. Determination of the small Solar system bodies orbital elements from astrometric observations with OMT-800 telescope / V.V. Troianskyi, O.A. Bazyey, V.I. Kashuba, V.V. Zhukov // *Third Gaia Fun SSO "Gaia Follow-up Network for Solar System Objects"*. – Paris: IMCCE. – 2015. – Vol. 3. – P. 127-130.
3. Troianskyi V.V. The Solar-radiation pressure effects on the orbital evolution of asteroid moons / V.V. Troianskyi, O.A. Bazyey // *Odessa Astronomical Publications*. – 2015. – Vol. 28(1). – P. 76-77.
4. Troianskyi V.V. The impact of the non-sphericity of the gravitational field of the asteroid on the evolution of the orbits of its satellites / V.V. Troianskyi // *Odessa Astronomical Publications*. – 2015. – Vol. 28(2). – P. 299-303.
5. Troianskyi V.V. Disintegration's condition of binary and multiple asteroids under the action of tidal forces Major Solar system planets / Troianskyi V.V., Radchenko K.O., Bazyey O.A. // *Astronomical School's Report*. – 2015. – Vol. 11(2). – P. 145-156.
6. Troianskyi V.V. Resonances in the asteroids systems / V.V. Troianskyi // *Odessa Astronomical Publications*. – 2016. – Vol. 29. – P. 221-223.
7. Troianskyi V.V. Dynamics of the asteroid rings (10199) Chariklo / Troianskyi V.V., Bazyey O.A. // *Astronomical School's Report*. – 2016. – Vol. 12(2). – P. 122-124.
8. Bonomi R. Observations and Orbits of Comets / Bonomi R., Facchini M., Negrelli P [...] Troianskyi V. [...] // *Minor Planet Electronic Circ.* – 2014, 2015, 2016, 2017. No.2015-J41, No.2015-Q71, No.2015-U54, No.2015-H37, No.2015-E14, No.2015-N31, No. 2016-Q04, No. 2016-M09, No. 2016-K18, No. 2017-A77.

9. Троянский В.В. Эволюция орбит тройных астероидов 1994 CC и 2001 SN263, сближающихся с Землей / Троянский В.В., Базей А.А. // XVI Міжнародна наукова конференція "Астрономічна школа молодих вчених". Програма і тези доповідей. Кіровоград. – 2014. – С. 65.

10. Троянский В.В. Методика обработки наблюдений и прогнозирование движения астероидов сближающихся с Землей по данным телескопа ОМТ-800 / Троянский В.В., Базей А.А., Кашуба В.И., Жуков В.В. // 14-th Odessa International Astronomical Gamow Conference-School "Astronomy and beyond: Astrophysics, Cosmology and Gravitation, Cosmomicrophysics, Radioastronomy and Astrobiology". Program and abstracts. Odessa. – 2014. – P. 50.

11. Троянский В.В. Эволюция ретроградных орбит спутников двойных и кратных астероидов из группы AC3 / Троянский В.В., Базей А.А. // 14-th Ukrainian conference on space research. Abstracts. Kyiv. – 2014. – P. 35.

12. Троянский В.В. Области устойчивого движения на орбитах спутников двойных и кратных астероидов сближающихся с Землей / Троянский В.В., Базей А.А. // VI Memorial International conference "САММАС-2014". Book of selected papers and abstracts. Vinnytsia. – 2014. – P. 88.

13. Троянский В.В. Орбитальный резонанс спутников астероидов сближающихся с Землей / Троянский В.В., Базей А.А. // Сьома міжнародна наукова конференція "Вибрані питання астрономії та астрофізики". Програма та тези. Львів. – 2014. – С. 42.

14. Troianskyi V.V. The impact of the non-sphericity of the gravitational field of the asteroid on the evolution of the orbits of its satellites / V.V. Troianskyi, O.A. Bazyey // 22rd Young Scientists' Conference on Astronomy and Space Physics. Abstracts. Kyiv. – 2015. – P. 55.

15. Troianskyi V.V. Determination of small Solar system bodies orbital elements on astrometrical observations with OMT-800 telescope / V.V. Troianskyi, O.A. Bazyey, V.I. Kashuba, V.V. Zhukov // Gaia Fun SSO "Gaia Follow-up Network for Solar System Objects" #3. Programe and Abstracts. – Paris. – 2014. – P. 22.

16. Радченко К.О. Кратні астероїди головного поясу як елементи для утворення ретроградних супутників планет-гігантів / Радченко К.О., Троянський В.В. // XVII Міжнародна наукова конференція "Астрономічна школа молодих вчених". Програма і тези доповідей. Житомир. – 2015. – С. 67.
17. Troianskyi V. Dynamics of binary and triple asteroids / V. Troianskyi // International scientific and methodological conference "KOLOS 2015". Book of abstracts. Stakcin. – 2015. – P.6.
18. Troianskyi V. Numerical simulation of binary and multiple asteroids system dynamics / V. Troianskyi, O. Bazyey // XVI Odessa International Astronomical Gamow Conference-School "Astronomy and beyond: Astrophysics, Cosmology and Gravitation, Cosmomicrophysics, Radioastronomy and Astrobiology". Abstracts Book. Odessa. – 2016. – С. 39.
19. Troianskyi V. Numerical simulation of binary and multiple asteroids system dynamics / V. Troianskyi, O. Bazyey // Actual Questions of Ground-based Observational Astronomy "MAO-195". Mykolaiv. – 2016. – P. 25.
20. Горбачова А. Числова модель руху супутників карликової планети (134340) PLUTO / А. Горбачова, В. Троянський, О. Базей // VIII наукова конференція "Вибрані питання астрономії та астрофізики". Програма та тези. Львів. – 2016. С. – 45.
21. Troianskyi V. Dynamics of multiple system Pluto / Troianskyi V., Bazyey O., Zhukov V. // International scientific and methodological conference "KOLOS 2015". Book of abstracts. Stakcin. – 2016. – P.7.
22. Horbachova A. Dynamics of multiple system Pluto / Alice Horbachova, V. Troianskyi, O. A. Bazyey // 24rd Young Scientists' Conference on Astronomy and Space Physics. Abstracts. Kyiv. – 2017. – P. 46.
23. Троянский В. Резонанс Kozai в астероидных системах / Троянский В.В., Базей А.А. // XIX Міжнародна наукова конференція "Астрономічна школа молодих вчених". Програма і тези доповідей. Біла Церква. – 2017. – С. 76.

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ	2
СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА.....	4
ABSTRACT	7
REFERENCES	9
ЗМІСТ	12
ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	14
ВСТУП.....	15
РОЗДІЛ 1. КЛАСИФІКАЦІЯ МАЛИХ ТІЛ СОНЯЧНОЇ СИСТЕМИ ТА ЇХ СПОСТЕРЕЖЕННЯ.....	22
1.1 Малі тіла Сонячної системи.....	22
1.2 Подвійні і кратні малі тіла Сонячної системи та методи їх відкриття	24
1.3 Спостереження малих тіл Сонячної системи на телескопі ОМТ-800	28
Короткі висновки до Розділу 1	36
РОЗДІЛ 2. ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ АСТЕРОЇДНОЇ СИСТЕМИ.....	37
2.1 Рівняння руху	37
2.2 Врахування асиметрії компонентів астероїдної системи	42
2.3 Прискорення від приливної деформації астероїда.	51
2.4 Прискорення, зумовлене Сонцем, великими планетами і супутниками планет.	52
2.5 Тиск сонячного світла. Тіньова функція	53
Короткі висновки до Розділу 2	58
РОЗДІЛ 3. ЕВОЛЮЦІЯ АСТЕРОЇДНИХ СИСТЕМ	59
3.1 Розрив подвійних і кратних астероїдних систем приливними силами планет	59
3.2 Резонанси в астероїдних системах	60

3.3 Динаміка кілець астероїда (10199) Chariklo	63
3.4 Еволюція орбіт супутників обраних подвійних та кратних малих тіл Сонячної системи	67
3.5 Резонанс Kozai в системах малих тіл	97
3.6 Точність інтегрування диференціальних рівнянь руху	98
Короткі висновки до Розділу 3	100
ВИСНОВКИ	101
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	103
ДОДАТКИ	114

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

m – зоряна величина.

а.о. (AU) – астрономічна одиниця ($1.49597870 \times 10^{11} \pm 2000$) метрів.

G – гравітаційна стала (6.67408 ± 0.00031) $\times 10^{-11}$ м³·с⁻²·кг⁻¹.

a – велика піввісь орбіти.

q – перицентрична відстань.

Q – апоцентрична відстань.

e – ексцентриситет орбіти.

i – нахил орбіти.

Ω – довгота висхідного вузла орбіти.

ω – аргумент перицентру орбіти.

M_0 – середня аномалія орбіти.

T_p – час проходження через перицентр.

t – час.

ВСТУП

Актуальність теми. З початку ХХІ століття безупинне вдосконалення засобів спостереження і збільшення числа космічних місій до небесних тіл суттєво розширили наші представлення про Сонячну систему. Рішенням ХХVІ Генеральної асамблеї МАС (Міжнародного Астрономічного Союзу) в 2006 році була введена нова класифікація небесних тіл. Сьогодні по орбітам навколо Сонця рухаються великі планети, карликові планети, астероїди або малі планети, комети, метеороїди, пил і газ.

Раніше передбачалося, що тіла невеликих мас не можуть утримувати тривалий час супутники. Несподіванкою стало відкриття подвійних [81], а згодом і потрійних [45] малих планет. Деякі подвійні системи мають дуже короткий орбітальний період і швидке осьове обертання [9]. Більш того, в 2014 році був відкритий перший астероїд, що має систему кілець [11]. Значний інтерес представляють малі тіла, які зближуються з орбітою Землі. До теперішнього часу відомо біля пів сотні подвійних і кратних астероїдів, що зближуються з Землею [87].

Перераховані факти повинні отримати теоретичне пояснення. Необхідно зрозуміти процеси формування і динамічної еволюції подвійних астероїдів протягом 4.5 млрд. років в оточенні великих планет. Які чинники ведуть до їх розпаду або, навпаки, до випадання і утворення єдиного астероїда? Чи можуть кратні системи малих тіл утворюватися в даний час?

Дисертація націлена на отримання нових теоретичних результатів, використання яких допоможе відповісти на поставлені запитання.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Основна частина роботи виконана у Науково дослідному інституті "Астрономічна обсерваторія" та кафедрі астрономії ОНУ імені І.І. Мечникова в межах планових держбюджетних науково-дослідних тем №484 "Дослідження руху та фрагментації метеорних і штучних тіл в земній атмосфері та міжпланетному просторі" (2013-

2014, номер держ. реєстрації 0112U001749, ОК 0215U004226, ІК 0715U003271) та №527 "Високоточні вимірювання та моделювання руху штучних і природних космічних тіл у навколоземному просторі" (2015-2017, номер держ. реєстрації 0115U003201).

Ціль досліджень. Метою даної дисертаційної роботи є:

1. Вивчення динаміки супутників астероїдів.
2. Реалізація методик визначення коефіцієнтів розкладання гравітаційного поля компонентів астероїдних систем.
3. Дослідження вкладу періодичних і вікових збурень в еволюцію орбіт астероїдних систем.

Об'єкт дослідження. Подвійні і кратні малі тіла Сонячної системи.

Предмет дослідження. Еволюція орбіт супутників подвійних і кратних малих тіл Сонячної системи.

Методи дослідження. Чисельне моделювання та інтегрування рівнянь руху. Для моделювання використовувався мова програмування *Object Pascal* в середовищі розробки *Delphi*. Спостереження на телескопі ОМТ-800.

Наукова новизна отриманих результатів. За допомогою нової методики обробки оптичних спостережень підвищена проникна здатність телескопа ОМТ-800 з 19^m до 21^m ;

Уточнено орбіти нових астероїдів;

Вперше розраховані резонанси в астероїдних системах;

Вперше обчислені: маса, велика піввісь орбіти, орбітальний період, резонанси, передбачуваного супутника-пастуха астероїда (10199) Chariklo;

Вперше обчислені 5 коефіцієнтів розкладання потенціалу гравітаційного поля обраних компонентів астероїдних систем;

Побудована модель руху супутників малих тіл Сонячної системи, що враховує асиметрію компонентів моделі і тиск сонячного світла на супутники астероїдів;

Детально розглянуто 9 систем малих тіл: (45) Eugenia, (87) Sylvia, (90) Antiope, (66391) 1999 KW4, (134340) Pluto, (136108) Haumea, (136617) 1994 CC, (153591) 2001 SN263, (385446) Manwe.

Практичне значення отриманих результатів. Запропонована модель і методи вже використовуються в плануванні широкого спектра завдань спостережень (астрометричних та фотометричних) подвійних і кратних малих тіл Сонячної системи.

Особистий внесок здобувача. У роботах, виконаних зі співавторами, особистий внесок здобувача полягає в участі постановки задачі і проведенні чисельних та аналітичних розрахунків. Підготовка робіт до публікації.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися на наукових семінарах кафедри астрономії ОНУ імені І.І. Мечникова, НДІ "Астрономічна обсерваторія" ОНУ імені І.І. Мечникова і на наступних міжнародних наукових конференціях:

1. International scientific and methodological conference "KOLOS 2013", 5-7 December 2013, The Astronomical Observatory on Kolonica Saddle, Slovakia.
2. XVI Міжнародна наукова конференція "Астрономічна школа молодих вчених", 29-31 травня 2014р., Кіровоградський державний педагогічний університет, Кіровоград, Україна.
3. 14-th Odessa International Astronomical Gamow Conference-School "Astronomy and beyond: Astrophysics, Cosmology and Gravitation, Cosmomicrophysics, Radioastronomy and Astrobiology", August 17-24, 2014, Odessa I.I.Mechnikov National University, Odessa, Ukraine.

4. *14-th* Ukrainian conference on space research, September 8-12, 2014, Institute of electron physics NASU, Uzhgorod, Ukraine.
5. *VI* Memorial International conference "САНМАС-2014", October 29 - November 2, 2014р., Вінницький державний педагогічний університет, Vinnytsia, Ukraine.
6. *VII* міжнародна наукова конференція "Вибрані питання астрономії та астрофізики", 7-10 жовтня 2014р., Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна.
7. *Third* "Gaia Follow-up Network for Solar System Objects" Workshop, November 24-26, 2014, Institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides, Observatoire de Paris, France.
8. International scientific and methodological conference "KOLOS 2014", December 4-6, 2014, The Astronomical Observatory on Kolonica Saddle, Slovakia.
9. *22nd* Young Scientists' Conference on Astronomy and Space Physics, April 20-25, 2015, Kyiv, Ukraine.
10. *XVII* Міжнародна наукова конференція "Астрономічна школа молодих вчених", 20-22 травня 2015р., Житомирський державний університет, Житомир, Україна.
11. *5-th* Gamow Memorial International Conference dedicated to 111-th anniversary of George Gamow "Astrophysics and Cosmology after Gamow: progress and perspectives" and *15-th* Odessa International Astronomical Gamow Conference-School "Astronomy and beyond: Astrophysics, Cosmology and Gravitation, Cosmomicrophysics, Radioastronomy and Astrobiology", August 16-23, 2015, Odessa I.I.Mechnikov National University, Odessa, Ukraine.
12. International scientific and methodological conference "KOLOS 2015", December 3-5, 2015, The Astronomical Observatory on Kolonica Saddle, Slovakia.
13. *The 4th* "Workshop on Binaries in the Solar System", June 21-23, 2016, Prague, Czech Republic.

14. *16-th* Odessa International Astronomical Gamow Conference-School "Astronomy and beyond: Astrophysics, Cosmology and Gravitation, Cosmomicrophysics, Radioastronomy and Astrobiology", August 14-20, 2016, Odessa I.I.Mechnikov National University, Odessa, Ukraine.
15. *MAO - 195*. "Actual Questions of Ground-based Observational Astronomy", September 26-29, 2016, Mykolaiv, Ukraine.
16. *VIII* наукова конференція "Вибрані питання астрономії та астрофізики", 17-12 жовтня 2016р., Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна.
17. International scientific and methodological conference "KOLOS 2016", December 1-3, 2016, The Astronomical Observatory on Kolonica Saddle, Slovakia.
18. *24nd* Young Scientists' Conference on Astronomy and Space Physics, April 24-29, 2017, Kyiv, Ukraine.
19. *XIX* Міжнародна наукова конференція "Астрономічна школа молодих вчених", 24-25 травня 2017р., Біла Церква, Україна.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи викладені в 8 статтях (без урахування абстрактів конференцій). Список опублікованих статей:

1. Troianskyi V.V. Method for calculating orbits of near-Earth asteroids observed with telescope OMT-800 / V.V. Troianskyi, O.A. Bazyey, V.I. Kashuba, V.V. Zhukov, S.O. Korzhavin // Odessa Astronomical Publications. – 2014. – Vol. 27(2). – P. 154-155.
2. Troianskyi V.V. Determination of the small Solar system bodies orbital elements from astrometric observations with OMT-800 telescope / V.V. Troianskyi, O.A. Bazyey, V.I. Kashuba, V.V. Zhukov // Third Gaia Fun SSO "Gaia Follow-up Network for Solar System Objects". – Paris: IMCCE. – 2015. – Vol. 3. – P. 127-130.

3. Troianskyi V.V. The Solar-radiation pressure effects on the orbital evolution of asteroid moons / V.V. Troianskyi, O.A. Bazyey // Odessa Astronomical Publications. – 2015. – Vol. 28(1). – P. 76-77.
4. Troianskyi V.V. The impact of the non-sphericity of the gravitational field of the asteroid on the evolution of the orbits of its satellites / V.V. Troianskyi // Odessa Astronomical Publications. – 2015. – Vol. 28(2). – P. 299-303.
5. Troianskyi V.V. Disintegration's condition of binary and multiple asteroids under the action of tidal forces Major Solar system planets / Troianskyi V.V., Radchenko K.O., Bazyey O.A. // Astronomical School's Report. – 2015. – Vol. 11(2). – P. 145-156.
6. Troianskyi V.V. Resonances in the asteroids systems / V.V. Troianskyi // Odessa Astronomical Publications. – 2016. – Vol. 29. – P. 221-223.
7. Troianskyi V.V. Dynamics of the asteroid rings (10199) Chariklo / Troianskyi V.V., Bazyey O.A. // Astronomical School's Report. – 2016. – Vol. 12(2). – P. 122-124.
8. Bonomi R. Observations and Orbits of Comets / Bonomi R., Facchini M., Negrelli P [...] Troianskyi V. [...] // Minor Planet Electronic Circ. – 2014, 2015, 2016, 2017. No.2015-J41, No.2015-Q71, No.2015-U54, No.2015-H37, No.2015-E14, No.2015-N31, No. 2016-Q04, No. 2016-M09, No. 2016-K18, No. 2017-A77.

Зміст роботи. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг роботи становить 147 сторінок, дисертація містить 50 малюнків, 13 таблиць, список цитованої літератури включає в себе 105 посилань.

У **Вступі** показані актуальність проблеми, мета дослідження і постановка задачі, представлені основні результати дисертації та положення, що виносяться на захист, дана їх наукова новизна і практична цінність. Наводяться обсяг і структура дисертації.

У **Першому** розділі викладені основні положення сучасного уявлення про групи і родини астероїдів. Наведено визначення малої планети і подвійної або кратної малої планети Сонячної системи. Показано кількість і перелічені методи відкриття супутників астероїдів. Наведено список досліджуваних об'єктів. Викладено нові особливості спостереження астероїдів при їх русі по геліоцентричних орбіт на телескопі ОМТ-800.

У **Другому** розділі розглянуті структурні складові чисельної моделі, що використовується для летального вивчення еволюції орбіт супутників систем малих тіл. Розписані рівня руху, в координатній формі. Розписані, методи врахування асиметрії компонентів системи, приливних горбів, тиску світла з урахуванням тіньової функції.

У **Третьому** розділі наведені умови розриву 168 астероїдних систем, розраховані резонанси в деяких з них. Вперше наведені орбітальні і фізичні характеристики гіпотетичного супутника-пастуха у астероїда (10199) Chariklo. Детально розглянуті дев'ять систем малих тіл, з подальшим періодограмним аналізом отриманих змін в Кеплерових елементах орбіт.

У **Висновках** містяться основні результати роботи.

У **Додатках** увійшли таблиці та рисунки, що не були поміщені в основний текст і мають допоміжне значення.

РОЗДІЛ 1.

КЛАСИФІКАЦІЯ МАЛИХ ТІЛ СОНЯЧНОЇ СИСТЕМИ ТА ЇХ СПОСТЕРЕЖЕННЯ

1.1 Малі тіла Сонячної системи

У 2006 році Міжнародний Астрономічний Союз (МАС) для опису об'єктів Сонячної системи, які не є ні великими планетами, ні карликовими планетами, ні їх супутниками, ввів термін – мале тіло Сонячної системи [88].

Основними критеріями є – відсутність гідростатичної рівноваги і рух по геліоцентричній орбіті. Деякі з найбільших малих тіл Сонячної системи в подальшому можуть бути перекласифіковані в карликові планети, якщо в результаті досліджень з'ясується, що вони знаходяться в стані гідростатичної рівноваги.

Далі було розглянуто групи малих тіл Сонячної системи, які об'єднані на підставі орбітальних і фізичних параметрів. Групи отримують назву в честь свого першого відкритого представника або виходячи з місця розташування орбіт представників групи.

Вулканоїди – гіпотетичні астероїди, з великою піввіссю орбіти 0.07 – 0.21 а.о. Пошуки активно велися національним управлінням з повітроплавання і дослідженню космічного простору (NASA) [89] в 2009–2010 роках. Вулканоїди так і не були виявлені, якщо вони існують, то передбачається, що їх діаметр не перевищує 5.7 км, оскільки більші об'єкти були б вже виявлені [68].

Астероїди які зближуються із Землею (А33, NEA) – група астероїдів з перигелійною відстанню менше або рівною 1.3 а.о. Частина з них, які наближаються до Земної орбіти на 0.05 а.о. або менше і мають абсолютну зоряну величину не слабкіше 22^m , вважаються потенційно небезпечними об'єктами (PHAs).

A33 в залежності від параметрів орбіт щодо Землі відносяться до однієї з наступних чотирьох груп:

Атіри (Atiras) – афелійна відстань менше 0.983 а.о. і велика піввісь менше 1 а.о.;

Атони (Atens) – афелійна відстань більше 0.983 а.о. і велика піввісь менше 1 а.о.;

Аполлони (Apollos) – перигелійна відстань менше 1.017 а.о. і велика піввісь більше 1 а.о.;

Амури (Amors) – перигелійна відстань лежить в межах від 1.017 а.о. до 1.3а.о. і велика піввісь більше 1 а.о..

Марс-кроссери (Mars-crossers) – астероїди, орбіти яких перетинають орбіту Марса. Перигелій орбіти даних астероїдів лежить в межах 1.66 – 1.3 а.о.

Головний пояс астероїдів (Main Belt members) – найчисленніша група астероїдів, що розташована між орбітами Марса і Юпітера. Першим відкритим об'єктом Головного поясу астероїдів і малим тілом Сонячної системи була (1) Ceres.

Троянські астероїди (Trojans asteroids) – група астероїдів, які рухаються в околицях точок лібрації системи Сонце - планета. Найбільше таких астероїдів виявлено у Юпітера. Так само були відкриті троянці у Нептуна, Марса і один у Землі.

Кентаври (Centaur) – група астероїдів, що знаходиться між орбітами Юпітера і Нептуна 5.5 а.о. – 30.1 а.о. Кентаври за своїми орбітальними і фізичними властивостями схожі як на астероїди так і на комети.

Дамоклоїди (Damoscloids) – невелика група астероїдів, які рухаються по кометоподібним траєкторіям, з ексцентриситетом орбіти більше 0.75 і великим нахилом орбіти.

Транснептунові об'єкти, ТНО (Trans-Neptunian objects, TNO) – група малих тіл, що знаходяться за орбітою Нептуна, велика піввісь орбіти, більше 30 а.о. Транснептунові об'єкти утворюють пояс Койпера, розсіяний диск і хмару Оорта,

які, в свою чергу, складаються з більш дрібних підкласів. Пояс Койпера складається з класичних об'єктів і резонансних.

Комети – дифузне мале тіло Сонячної системи, яке складається з твердих частинок і газу. Обертається по геліоцентричній, зазвичай сильно еліптичній або навіть параболічній орбіті. Комети є нестабільним тілом з масами порядку 10^{18} г, середній термін життя близько 100 перигелійних проходжень.

Метеороїди – згідно з визначенням МАС, це твердий об'єкт, який рухається у міжпланетному просторі, розміром значно менше ніж астероїд, але значно більше ніж атом.

Окрім іншого, розглянемо сімейство малих тіл Сонячної системи, які об'єднані на підставі орбітальних параметрів. Такі сімейства отримують назву в честь першого відкритого представника сімейства. Сімейство астероїдів – це група астероїдів, які мають близькі орбітальні характеристики, такі, як велика піввісь, ексцентриситет і нахил орбіти. Астероїди, що входять до складу сімейства, зазвичай, є фрагментами більших астероїдів, що зіткнулися в минулому та зруйнувалися в результаті цього зіткнення. На даний момент часу відомі такі сімейства Головного поясу астероїдів: Eos, Eunomia, Flora, Hygiea, Koronis, Maria, Nysa, Themis, Vesta, Adeona, Astrid, Bower, Brasilia, Gefion, Chloris, Dora, Erigone, Hansa, Hilda, Karin, Lydia, Massalia, Meliboea, Merxia, Misa, Naëma, Nemesis, Rafita, Veritas, Theobalda та сімейства ТНО: Haumea, Plutino, Cubewano.

1.2 Подвійні і кратні малі тіла Сонячної системи та методи їх відкриття

Подвійне або кратне мале тіло – це система з двох або більше гравітаційно пов'язаних малих тіл Сонячної системи, які обертаються по замкнутих орбітах навколо спільного центру мас.

На 01.05.2017 відомо 300 подвійних і кратних об'єктів (Додаток А): 286 подвійних, 13 потрійних систем і шестикомпонентна система Плутона, в цілому 317 супутників малих тіл і астероїд (10199) Chariklo з системою кілець.

Ці системи включають в себе наступні об'єкти:

- 61 АЗЗ (3 з двома супутниками кожний),
- 22 Марс-кроссери (1 з двома супутниками),
- 132 астероїд Головного поясу (8 з двома супутниками кожний),
- 4 троянські астероїди Юпітера, і
- 81 транснептуновий об'єкт (2 з двома супутниками, 1 з п'ятьма супутниками, не враховуючи 1 з кільцями).

З них чотири транснептунових об'єкта, які в даний час згадуються згідно конвенції IAU [90] як карликові планети: (134340) Pluto, (136108) Haumea, (136199) Eris і (136472) Makemake.

В наступній Таблиці (1.1) наведені чисельні значення за типом і способом виявлення. Космічні оптичні спостереження включають дані телескопа Hubble і космічного апарату Galileo.

Перші повідомлення про спостереження супутників астероїдів були отримані під час покриття зір астероїдами, при візуальних спостереженнях (6) Небе в 1977 році [21] і фотометричних спостережень (532) Herculina в 1978 році [20], [51], [38]. Ці та аналогічні повідомлення протягом наступних років не були сприйняті в кінцевому рахунку всерйоз через відсутність підтверджень.

Таблиця 1.1.

**Методи виявлення. Кількість систем з загальним
числом супутників (в дужках)**

Група	Наземні, оптичні спостере- ження	Космічні, оптичні спостере- ження	Радарні спостере- ження	Фото- метричні спостере- ження	Всього
АЗЗ	0 (0)	0 (0)	43 (45)	18 (18)	61 (63)
Марс-кроссери	0 (1)	0 (0)	0 (0)	22 (22)	22 (23)
Астероїди Головного поясу	17 (23)	4 (4)	0 (0)	111 (113)	132 (140)
Троянські астероїди Юпітера	2 (2)	0 (0)	0 (0)	2 (2)	4 (4)
Транснептунові об'єкти	14 (15)	66 (71)	0 (0)	1 (1)	81 (87)
Всього	33 (41)	70 (75)	43 (45)	154 (156)	300 (317)

Перше підтвержене відкриття супутника астероїда було зроблено космічним апаратом Galileo під час його обльоту астероїда (243) Ida в 1993 році [81], кілька інших були виявлені за допомогою прямого зображення з космічного телескопа Hubble і наземних телескопів з адаптивною оптикою. По кривим блиску були відкриті кілька подвійних астероїдів, що зближуються з Землею. Деякі з них були підтвержені радарними спостереженнями. Радарні спостереження також незалежно виявили деякі супутники. Першу малу планету з декількома супутниками, (87) Sylvia, було ідентифіковано в 2005 році [45]. Що стосується зовнішніх об'єктів Сонячної системи, перший супутник Плутона був виявлений в 1978 році, задовго до відкриття інших транснептунових об'єктів [42]. Подвійні транснептунові об'єкти були виявлені з 1998 року, перший 1998 WW31 [80].

Відкриті навколоземні системи астероїдів включають 7 подвійних систем типу Aten, 37 подвійних систем типу Apollo і 14 подвійних систем типу Amor, плюс потрійний Amor (153591) 2001 SN263 і потрійний Apollo (136617) 1994 CC. Ці навколоземні астероїди є близькими подвійними системами. Ймовірно, що більшість з цих подвійних малих тіл є "купою щебеню" ("rubble piles"), яка була розкручена під дією YORP ефекту, в результаті чого масове осипання призводить до формування супутника [31], [59]. Ефект Yarkovsky–O'Keefe–Radzievskii–Paddack або YORP ефект, це явище зміни швидкості обертання невеликих астероїдів неправильної форми під дією теплового випромінювання від астероїда. Багато навколоземних астероїдів мають високі швидкості обертання – близько до межі поділу (3,5 години) [104]. 29 таких об'єктів є контактними подвійними системами [39]. На поверхнях планет земної групи і Місяці знайдено велике число подвійних кратерів, утворених одночасним впливом двох об'єктів.

20 астероїдів, що зближуються із Землею перетинають орбіту Марса і один троянський астероїд Марса є подвійними. Також відомий один астероїд типу Марс-кроссер є потрійною системою.

Супутники астероїдів в Головному поясі, що виявлені на сьогоднішній день, показують більш широке розмаїття як з точки зору відстаней між компонентами, так і з точки зору відносних розмірів. Деякі з них можуть бути фрагментами від

зіткнень, які були взаємно захоплені одне одним. Єдина система розглянута крупним планом є (243) Ida і Dactyl. Зображення з космічного апарату Galileo показали неправильну форму для (243) Ida, звідки випливає, що це не просто "купа щебеню" [81]. У 2005 році було оголошено, що (87) Sylvia має другий супутник – це перша відкрита потрійна астероїдна система [45]. Ймовірно, такі системи були створені як результат руйнування від зіткнення. З Головного пояса 18 подвійних астероїдів входять в сімейство Hungaria. Багато з невеликих подвійних астероїдів сформовані в результаті дії YORP ефекту.

Перший підтверджений подвійний троянський астероїд (617) Patroclus, складається з компонентів, схожих за розміром [40]. У другого ідентифікованого подвійного астероїда, (624) Hektor, головний компонент більше вторинного і система є контактною [84].

Серед 2504 відомих транснептунів і кентаврів: 78 подвійних, 2 потрійних, та шестикомпонентна система (134340) Pluto. Перший супутник виявлений в грудні 2000 року у астероїда 1998WW31. Велика частина (46 з 80) відомих транснептунових систем є Cubewanos. Cubewanos – це класичні об'єкти поясу Койпера, орбіта яких розташована за орбітою Нептуна і не знаходиться з ним в явно вираженому орбітальному резонансі. Велика піввісь орбіт класичних об'єктів поясу Койпера знаходиться в діапазоні 40-50 а.о., і, на відміну від (134340) Pluto, вони не перетинають площину орбіти Нептуна та знаходяться на орбітах з невеликим ексцентриситетом. Два з них є кентаврами: (42355) Typhon і (65489) Ceto.

Багато з виявлених подвійних малих тіл розташовані один від одного на більших відстанях, ніж компоненти системи Pluto – Charon. Було висловлено припущення, що варіації кривої блиску деяких транснептунів можна пояснити присутністю близького супутника [20], [51], [38]. У 2014 році відкрили два вузьких кільця навколо (10199) Chariklo [11]. Вид цих кілець говорить про те, що з великою ймовірністю в системі присутній супутник пастух. Передбачається, що системи (134340) Pluto і (136108) Haumea утворені в результаті зіткнень як результат руйнуванні їх батьківських тіл.

1.3 Спостереження малих тіл Сонячної системи на телескопі ОМТ-800

Протягом близько 60 років на астрономічній станції Маяки НДІ "Астрономічна обсерваторія" Одеського національного університету імені І.І. Мечникова, проводились патрульні спостереження неба. Станція розташована на відстані 40 км на захід від Одеси (географічні координати: $\varphi = 46.39679$ град. північної широти і $\lambda = 30.27274$ град. східної довготи, код спостережної станції в Центрі малих планет (MPC) 583 Odessa-Mayaki).

Станція є досить відоме місце, тому що там зберігається третя в світі за кількістю колекція астрономічних негативів. Вона складається з близько 100000 астрофотоплатівок, отриманих на цій станції в період 1957-1998 рр за допомогою 7-ми камерного астрографа. Крім того, там зберігається колекція близько 10000 астрофотоплатівок, отриманих в 1908-1953 рр в Симеїзській обсерваторії.

Ця станція була побудована в ході підготовки до Міжнародного Геофізичного року в 1957 р. За період роботи станції, для моніторингу неба використовувалося багато різних інструментів. Серед них телескоп системи Річі-Кретьєна з діаметром головного дзеркала 600 мм (RC-600, період з 2006-2012 роки), і Одеський Багатофункціональний телескоп ОМТ-800 (діаметр дзеркала 800 мм, введений в експлуатацію в 2013 році, працює по сьогоднішній день) [3].

Маючи докладні записи, зроблені спостерігачами в журналі кожного інструменту, можна отримати корисну інформацію про кількість спостережних ночей на Маякській астрономічній станції.

Вважається, що спостережна ніч, це та, коли згідно журналів спостережень проводилися спостереження будь-якої тривалості. Іншими словами, навіть мала частина ночі, охоплена спостереженнями розглядається як спостережна ніч. Ніч не вважається спостережною коли ні один телескоп на спостережній станції не отримувал спостережень, в тому числі через технічні причини або через відсутність спостерігачів на телескопах.

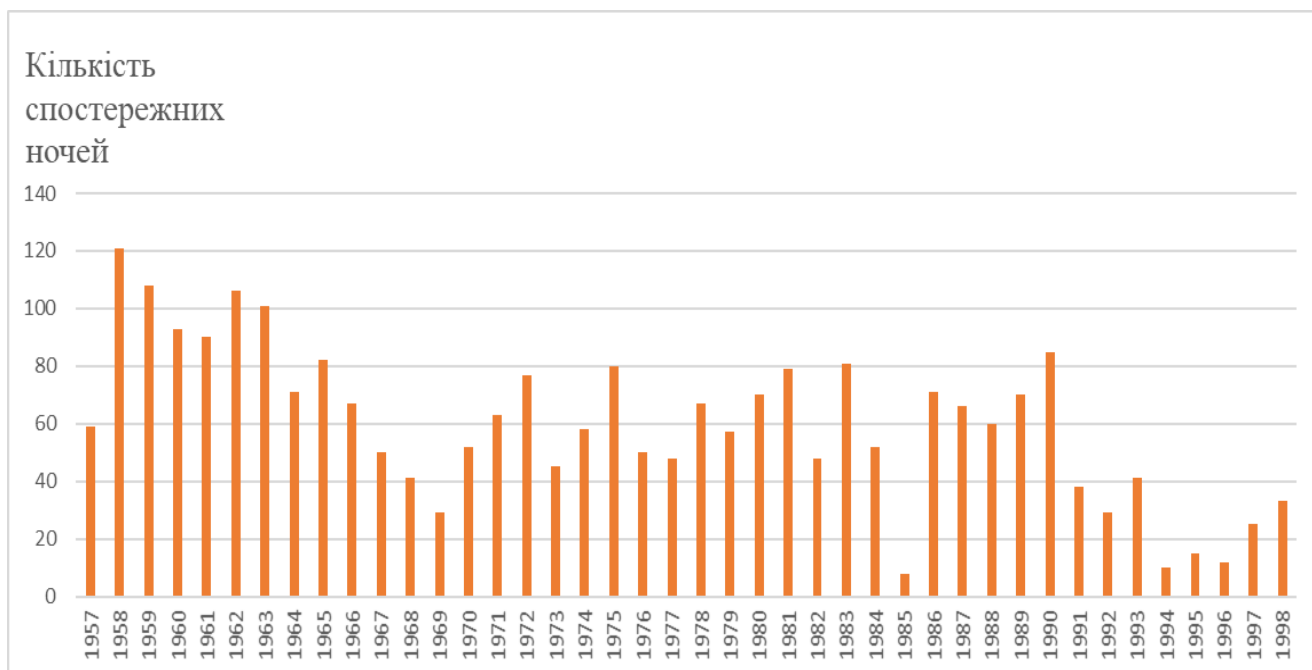


Рис. 1.1. Річна кількість спостережних ночей за журналами спостережень 7-камерного астрографа Одеської обсерваторії

Статистику спостережень на 7-камерному астрографі наведено на Рис. 1.1.

Починаючи з 1991 року, можна відзначити низьку ефективність 7-ми камерного астрографа. Це не було пов'язано зі зміною погодних умов. Основна проблема була в складній економічній ситуації в Україні на той час.

Телескоп системи Річі-Кретьєна RC-600 почав надавати значні астрономічні дані в квітні 2006 року. В 2012 році був демонтований для реконструкції.

Слід зазначити, що число ясних ночей, підрахованих по записам на різних телескопах і в рамках різних програм спостережень може відрізнятися місяць від місяця. Наприклад, спостереження не проводилися на 7-ми камерному астрографі в ясні ночі протягом повного Місяця. У той же час спостереження на RC-600 і ОМТ-800 проводилися навіть в напів'ясні ночі і в ночі з досить поганою прозорістю атмосфери.

З початком роботи в кінці 2012 року нового телескопа ОМТ-800 (0.8 м $f/2.67$ рефлексор з коректором + CCD) (Рис. 1.2), на спостережній станції Маяки НДІ "Астрономічна обсерваторія" Одеського національного університету імені І.І. Мечникова з'явилася можливість отримання високоточних диференціальних

астрометричних спостережень геостаціонарних об'єктів, астероїдів і комет, яскравіше 21 інтегральної зоряної величини [72], [73].

Конструкція телескопа і його можливості докладно описані в статті [3].

На сьогоднішній день позиційні спостереження слабких об'єктів Сонячної системи є актуальними в зв'язку з необхідністю наземної підтримки космічних спостережень цих об'єктів, а також пошуку та обліку космічного сміття.

Для телескопа ОМТ-800, з огляду на його значну світлосилу, неможливі тривалі експозиції, оскільки, при експозиціях більше 30 секунд, слабкі об'єкти починають зливатися з фоном неба. Експериментально підібрано оптимальне значення експозиції 10-20 секунд (в залежності від наявності Місяця і стану атмосфери). Спостереження слабких об'єктів проводяться серіями по 5-15 послідовних експозицій. Результатом одиничного спостереження є монохромне 16-бітне зображення розміром 3056×3056 пікселів, збережене в форматі FITS. Типовий приклад такого зображення наведено на Рис. 1.3.

Для підвищення граничної зоряної величини спостережуваних об'єктів, а також для астрометричних редукцій зображень і отримання диференціальних екваторіальних координат спостережуваних об'єктів нами застосований програмний пакет CoLiTec [62], люб'язно наданий нам його розробниками. Зазначений пакет дозволяє виконувати корекцію кадрів будь-якого розміру з застосуванням медіанного фільтра і Фур'є-аналізу по яскравості, виконувати автоматичне калібрування і корекцію шляхом видалення "битих" і "гарячих" пікселів. Також є функція врахування віньєтування поля зору, коми, можливих збоїв добового ведення, сторонніх засвічень (в тому числі від Місяця, яскравих зір та планет), дифракційних променів. Характерний результат обробки одиничного кадру пакетом наведено на Рис. 1.4. В якості початкового кадру взятий кадр, наведений на Рис. 1.3.

Застосування функціоналу складання кадрів, реалізованого в програмному пакеті CoLiTec, дозволило нам збільшити проникну здатність телескопа з 19^m до 21^m, що видно на Рис. 1.4 і Рис. 1.5.



Рис. 1.2. Телескоп ОМТ-800, код спостережної станції по IAU Minor Planet Center [583 – Odessa-Mayaki]

Експериментальне тестування показало, що для отримання найкращих астрометричних спостережень необхідно отримувати як мінімум три серії по вісім кадрів. Використання восьми кадрів в серії та програмний пакет CoLiTec дозволяє отримувати так звані "суперкадри" з гарним співвідношенням сигнал-шум, а три "суперкадри", рознесені за часом, необхідні для визначення первинної орбіти об'єкта, що спостерігається.

Після отримання "суперкадрів" за допомогою програмного пакета CoLiTec в автоматичному режимі виконується пошук на кадрі як відомих астероїдів, так і невідомих об'єктів. Така можливість робить програмний пакет CoLiTec корисним інструментом для пошуку нових об'єктів та обробки оглядових спостережень неба.

Результати спостережень задовольняють вимогам до точності, що пред'являються Minor Planet Center [91] і публікуються в щомісячних рапортах [92].

Відправлені дані використовуються для уточнення Кеплерових елементів орбіт астероїдів, які в свою чергу необхідні нам для побудови чисельної моделі руху астероїдів в Сонячній системі. Кеплерові елементи – шість незалежних елементів орбіти, що визначають положення небесного тіла в просторі в наближенні задачі двох тіл [19]: велика піввісь, ексцентриситет, нахил, довгота висхідного вузла, аргумент перигелію, середня аномалія.

В ніч з 3 на 4 січня 2017 року був знайдений (V. Kashuba, V. Troianskyi) [MPS 757613] невідомий об'єкт. Отримані спостереження були використані для побудови первинної орбіти об'єкта методом Väisälä, реалізованим програмно автором дисертації. Невідомий об'єкт був ідентифікований, як астероїд Головного поясу.

Метод Väisälä [79], відрізняється винятковою простотою формул які застосовуються. Він широко використовується на практиці в разі, коли є дуже коротка дуга спостережень, яка не достатня, щоб визначити орбіту класичними методами і передбачити позицію об'єкта протягом наступного тижня або близько того. Так само, метод дозволяє отримати досить якісну первинну орбіту для подальшого уточнення одним з ітераційних методів.

Класичний метод Väisälä передбачає, що є два спостереження об'єкта в момент часу t_1 і t_2 . Väisälä орбіта є такою, що задовольняє обидві точки спостереження і при цьому об'єкт знаходиться на осі апсид в момент часу t_2 , в перигелії або афелії своєї орбіти. З точки зору математики, це виглядає наступним чином:

$$\frac{d\vec{r}_2}{dt_2} = 0. \quad (1.1)$$

Суть методу Väisälä, полягає тому, що по двом близьким спостереженням $(t_1, \alpha_1, \delta_1, t_2, \alpha_2, \delta_2)$ знаходиться первинна орбіта. При цьому геоцентрична відстань ρ_2 підбирається так, щоб була справедлива нерівність:

$$0 < a - r_2 < 0.5. \quad (1.2)$$

Запишемо вираз для пошуку геоцентричних прямокутних координат світила [79]:

$$\begin{cases} x_2 = \Delta_2 \cos \alpha_2 - X_2, \\ y_2 = \Delta_2 \sin \alpha_2 - Y_2, \\ z_2 = \Delta_2 \operatorname{tg} \delta_2 - Z_2, \end{cases} \quad (1.3)$$

де $\Delta_2 = \rho_2 \cos \delta_2$. Таким чином ми знайдем r_2 .

Геоцентричні компоненти швидкості (v_2) запишемо в наступному вигляді [79]:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{\Delta_1 \cos \alpha_1 - F_1 x_2 - X_1}{G_1}, \\ \dot{y}_2 = \frac{\Delta_1 \sin \alpha_1 - F_1 y_2 - Y_1}{G_1}, \\ \dot{z}_2 = \frac{\Delta_1 \operatorname{tg} \alpha_1 - F_1 z_2 - Z_1}{G_1}, \end{cases} \quad (1.4)$$

де $\Delta_1 = \frac{F_1 r_2 + X_1 x_1 + Y_1 y_1 + Z_1 z_1}{x_2 \cos \alpha_1 + y_2 \sin \alpha_1 + z_2 \operatorname{tg} \delta_1}$, $F_1 = 1 - A\tau^2$, $G_1 = \tau - B\tau^3$, $A = \frac{1}{2}r^3$, $B = \frac{A}{3}$,

$\tau = Gm(t_1 - t_2)$ – модифікований час між спостереженнями. Таким чином ми знайшли v_2 .

Отримані результати $(x_2, y_2, z_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2)$ використовуються для пошуку Кеплерових елементів орбіти світила на момент часу t_2 .

Всі орбіти, розраховані, починаючи з 1935 року на обсерваторії Turku, були отримані цим методом. Під керівництвом Väisälä обсерваторії Turku [93] і Tuorla [94] успішно займалися пошуком комет і астероїдів. В цілому його групою було відкрито 7 комет і 807 астероїдів.

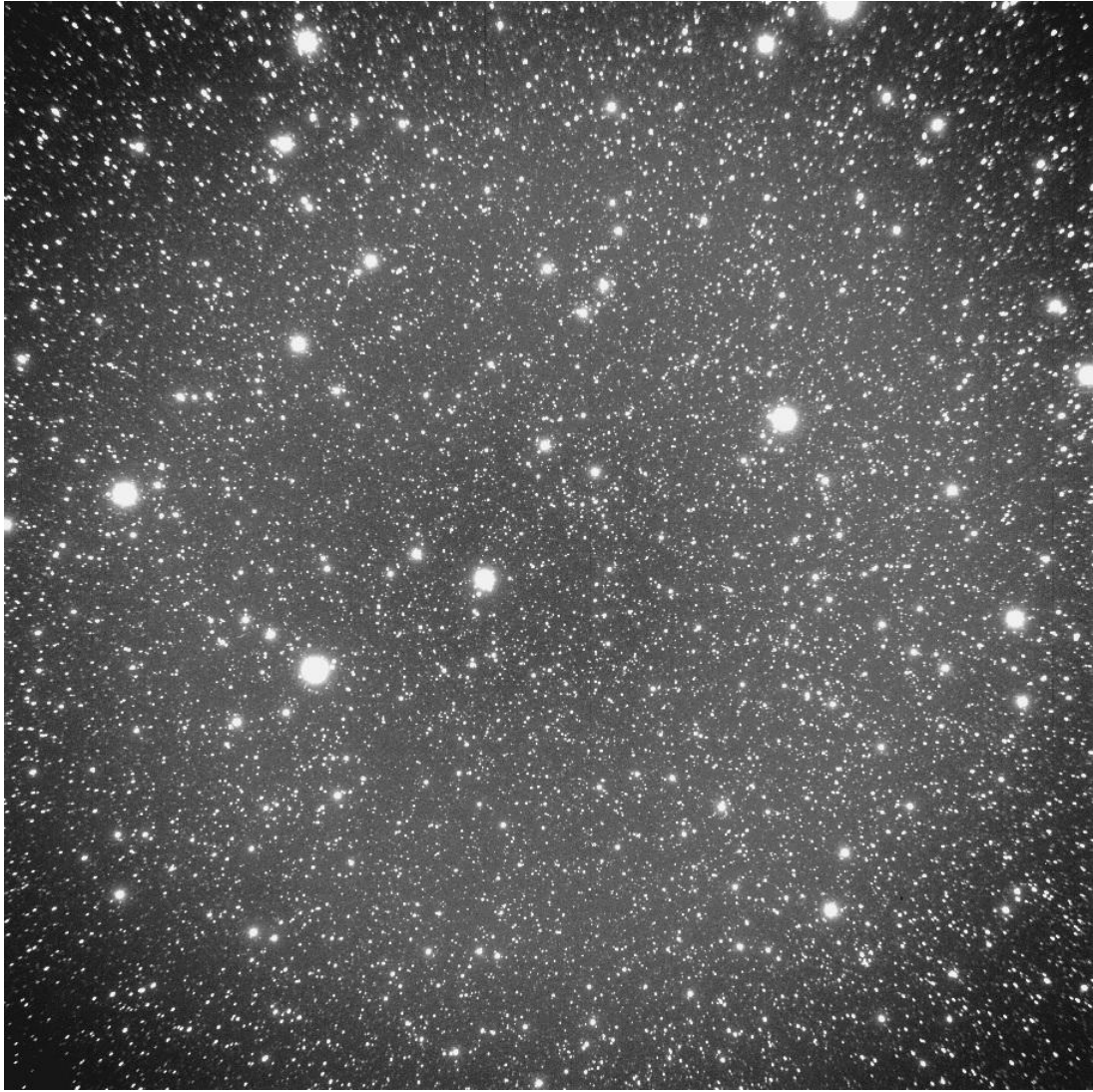


Рис. 1.3. Кадр до обробки, 10 секунд експозиція

Даний метод активно використовується для пошуку первинної орбіти малих тіл Сонячної системи на короткій дузі спостережень в IAU Minor Planet Center.

Невідомий об'єкт, що було знайдено за спостереженнями, що проводились в ніч з 3 на 4 січня 2017 року, після побудови орбіти повторно виявлений 26 січня 2017 року. В IAU Minor Planet Center астероїду присвоєна назва 2017 AB8. Далі орбіта була пов'язана з астероїдом 2014 OD380. Астероїд 2014 OD380 вперше спостерігали в обсерваторії Pan-STARRS 1, Haleakala [95] в 2014 році. Далі, було кілька вдалих, не пов'язаних між собою спостережень даного астероїда в 2015 році, після кожного з яких він губився зважаючи на недостатню для побудови пошукової ефемериди кількість і тривалість періоду спостережень.



Рис. 1.4. Кадр після обробки, 10 секунд експозиція

20 січня 2017 року був знайдений (V. Kashuba, V. Troianskyi) [MPS 766258], ще один невідомий об'єкт, який був ідентифікований, як астероїд із групи АЗЗ.

Спираючись на отриманні спостереження після побудови первинної орбіти об'єкта методом Väisälä невідомий об'єкт повторно знайдено 31 січня 2017 року. В IAU Minor Planet Center астероїду присвоєно назва 2017 BC94.

В результаті за період 2014 - 2017 роки отримано 32 результативні спостережні ночі. За цей період спостерігалися 3 подвійні астероїди ((32039) 2000 JO23, (66391) 1999 KW4, (276049) 2002 CE26), 9 нумерованих об'єктів (2014 XJ3, 2015 AZ43, 2015 BO510, 2015 JY1, 2010 VP219, 2016 SG31, 2016 YP9, 2017 AB8, 2017 BC94), та приблизно 160 нумерованих. Загальна кількість отриманих

астрометричних спостережень (точок) біля 1800 [10].

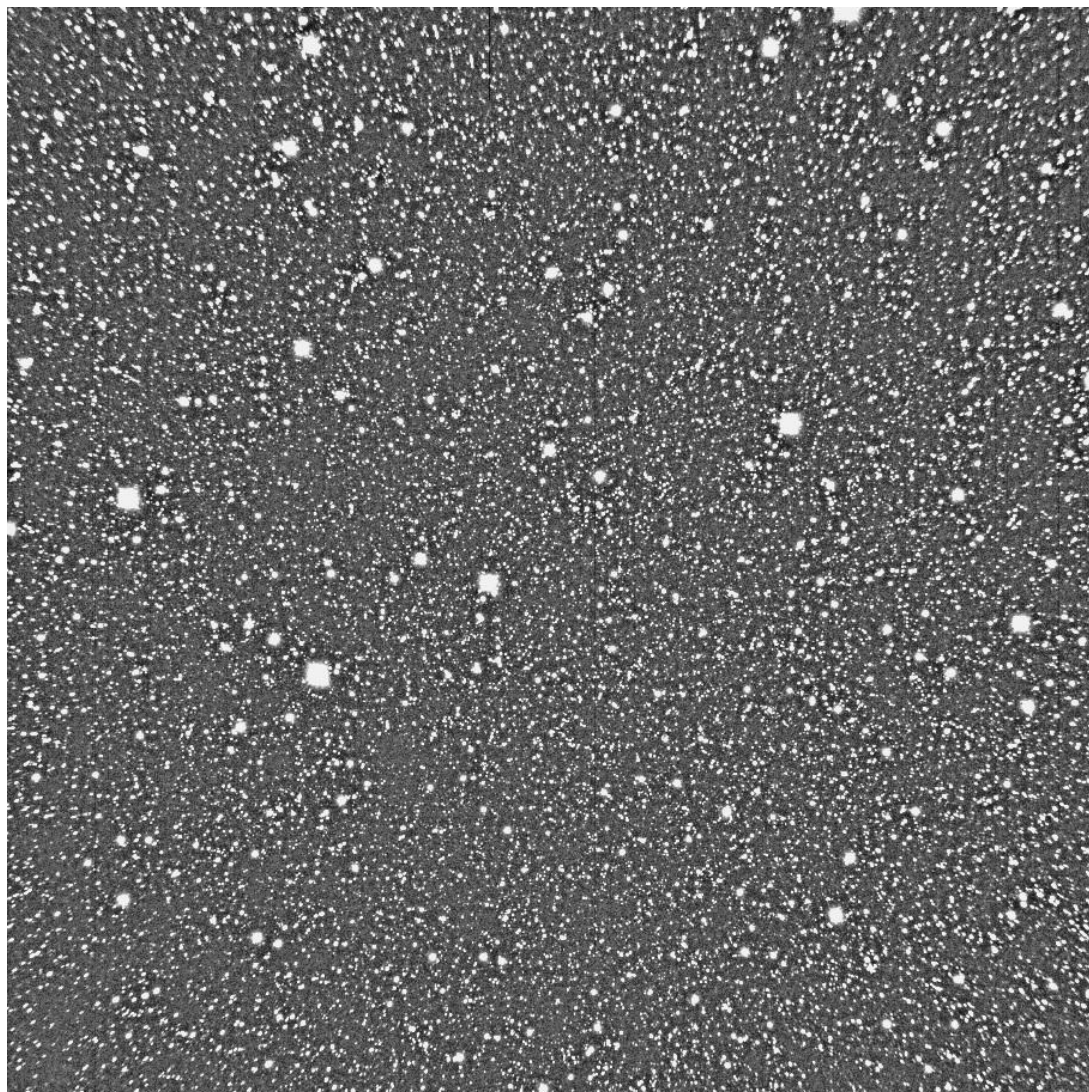


Рис. 1.5. "Суперкадр" із 8-ми кадрів з 10 секундною експозицією

Короткі висновки до Розділу 1

У Розділі 1 викладені основні положення сучасного уявлення про групи і родини астероїдів. Наведено визначення малої планети і подвійної або кратної малої планети Сонячної системи. Показано кількість і перелічені методи відкриття супутників астероїдів. Наведено список досліджуваних об'єктів. Викладено нові особливості спостережень астероїдів на телескопі ОМТ-800 та отримання їх орбіт.

РОЗДІЛ 2. ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ АСТЕРОЇДНОЇ СИСТЕМИ

2.1 Рівняння руху

Розглянемо задачу N тіл (Рис. 2.1.) в формулюванні Ньютона [19]. Нехай вектор \vec{r}_i з компонентами x_i, y_i, z_i визначає положення точки m_i відносно початку системи відліку. Сила тяжіння, яку відчуває точка m_i зі сторони точки m_j , по величині дорівнює $Gm_i m_j / r_{ij}^2$, а по напрямку збігається з вектором $\vec{r}_j - \vec{r}_i$. Сили, діючі з боку всіх точок m_j на масу m_i , будуть дорівнювати $Gm_i \sum_{j=1}^{n'} m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}^3}$ і тому:

$$\ddot{\vec{r}}_i = G \sum_{j=1}^{n'} m_i m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}^3}, \quad (2.1)$$

відмітимо, що $\vec{r}_j - \vec{r}_i = \vec{r}_{ij}$ (в координатах: $\vec{r}_{ij}(x_j - x_i, y_j - y_i, z_j - z_i)$), тоді

$$\ddot{\vec{r}}_i = G \sum_{j=1}^{n'} m_i m_j \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}. \quad (2.2)$$

Система рівнянь (2.2), виходить з прирівнювання виразів для закону всесвітнього тяжіння і II закону Ньютона. Штрих над знаком підсумовування означає пропуск значень, коли $i = j$.

У проєкціях на осі координат:

$$\begin{cases} m_i \ddot{x}_i = -G \sum_{j=1}^{n'} m_i m_j \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^3}, \\ m_i \ddot{y}_i = -G \sum_{j=1}^{n'} m_i m_j \frac{y_i - y_j}{r_{ij}^3}, \\ m_i \ddot{z}_i = -G \sum_{j=1}^{n'} m_i m_j \frac{z_i - z_j}{r_{ij}^3}. \end{cases} \quad (2.3)$$

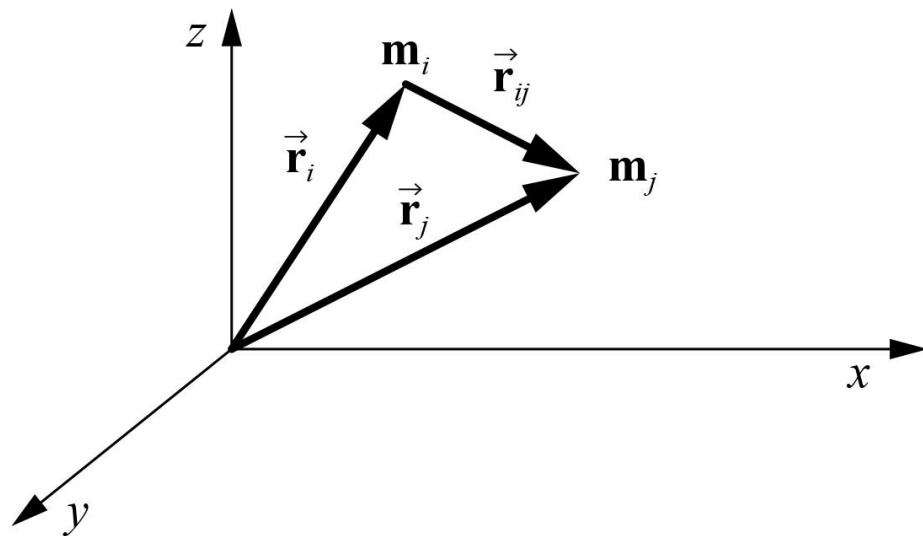


Рис. 2.1. Розташування матеріальних точок в задачі N тіл

Маємо $3N$ диференціальних рівнянь 2-го порядку. Для вирішення цієї системи треба мати $6N$ початкових умов $(x_i, \dot{x}_i, y_i, \dot{y}_i, z_i, \dot{z}_i)$, відповідно, $6N$ інтегралів руху.

Задачу N тіл, звичайно, можна вирішувати (інтегрувати) чисельно.

Інтегрування диференціальних рівнянь руху в задачі N тіл. В цій задачі відомо десять інтегралів руху. Сума рівнянь (2.3) дає

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n m_i \ddot{y}_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n m_i \ddot{z}_i = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Така система легко інтегрується:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i = c_1, \\ \sum_{i=1}^n m_i \dot{y}_i = c_2, \\ \sum_{i=1}^n m_i \dot{z}_i = c_3, \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{c}, \quad (2.5)$$

і другий раз:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i x_i = c_1 t + c_4, \\ \sum_{i=1}^n m_i y_i = c_2 t + c_5, \\ \sum_{i=1}^n m_i z_i = c_3 t + c_6, \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \vec{c} t + \vec{c}'. \quad (2.6)$$

Рівності (2.5) і (2.6) виражають закон збереження імпульсу. Їх ще називають інтегралами руху центру мас.

$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – постійні інтегрування. Їх значення визначаються початковими умовами і суттєво залежать від вибору системи координат.

Інтеграли збереження моменту імпульсу. Повернемося до рівнянь руху у вигляді (2.2). Після множення лівої і правої частини векторно на \vec{r}_i і підсумовування по i [19]:

$$\sum_{i=1}^n m_i \left[\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i \right] = k^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \left[\vec{r}_i \times \vec{r}_{ij} \right]. \quad (2.7)$$

Сума справа дорівнює нулю за будовою, тобто:

$$\sum_{i=1}^n m_i \left[\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i \right] = 0. \quad (2.8)$$

Отримане рівняння можливо проінтегрувати:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^n m_i \left[\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \right] \right\} = \sum_{i=1}^n m_i \left[\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i \right] = 0, \quad (2.9)$$

тому:

$$\sum_{i=1}^n m_i \left[\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \right] = \vec{c}. \quad (2.10)$$

В координатах:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i (y_i \dot{z}_i - \dot{y}_i z_i) = c_7, \\ \sum_{i=1}^n m_i (z_i \dot{x}_i - \dot{z}_i x_i) = c_8, \\ \sum_{i=1}^n m_i (x_i \dot{y}_i - \dot{x}_i y_i) = c_9. \end{cases} \quad (2.11)$$

Ці три інтеграла є закон збереження сумарного моменту імпульсу (моменту кількості руху) системи.

Зауваження про силову функцію. Повернемося до рівнянь руху (2.3):

Цій системі можна надати просту форму шляхом введення силової (або потенційної) функції.

Сконструюємо функцію, частинні похідні якої за відповідними координатами збігаються з правими частинами рівнянь руху (2.3). Це і буде силова функція [19]:

$$U = G \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}. \quad (2.12)$$

Отже:

$$\begin{cases} m_i \frac{d^2 x_i}{d t^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{d t^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{d t^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}. \end{cases} \quad (2.13)$$

(2.35) теж рівняння руху, записані з використанням силової функції.

Важливі властивості силової функції: U не залежить від вибору системи координат, так як в неї входять лише різниці координат; U не залежить від часу явно.

Інтеграл енергії. Оскільки силова функція – однозначна, та не залежить від часу, тому розглянута система консервативна, в ній повинна зберігатися механічна енергія.

Кінетична енергія системи [19]:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{r}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)}{2}, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (2 \dot{x}_i \ddot{x}_i + 2 \dot{y}_i \ddot{y}_i + 2 \dot{z}_i \ddot{z}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n (m_i \dot{x}_i \ddot{x}_i + m_i \dot{y}_i \ddot{y}_i + m_i \dot{z}_i \ddot{z}_i) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} \dot{z}_i \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

так як U явно від часу не залежить, то:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right) = \frac{dU}{dt} \quad (2.16)$$

– повна похідна.

Отже:

$$\frac{d}{dt} T = \frac{dU}{dt}, \quad (2.17)$$

тобто:

$$T - U = c_{10} \quad (2.18)$$

Формула (2.18) виражає теорему: в замкнутій системі N тіл сума кінетичної і потенційної енергій постійна.

З $6N$ інтегралів, необхідних для повного розв'язання задачі, отримано 10 (6 інтегралів руху центру мас ((2.5) і (2.6)), 3 інтеграла збереження моменту

імпульсу або інтеграли площ (2.11), інтеграл енергії (2.18)). Інші інтеграли для загального випадку N тіл невідомі.

2.2 Врахування асиметрії компонентів астероїдної системи

Останнім часом стало можливим досить точно визначення фізичних і геометричних характеристик астероїдних систем за допомогою радіолокаційних та фотометричних спостережень [87], що дозволило розрахувати асиметрію масивного компонента подвійних і кратних астероїдів для подальшого вивчення динаміки руху їх супутників.

Якщо в нульовому наближенні інтерпретувати гравітаційне поле астероїда як гравітаційне поле кулі з симетрично розподіленою густиною, тоді його гравітаційний потенціал U має виключно простий вигляд:

$$U = \frac{Gm}{r}, \quad (2.19)$$

де r – відстань від центру кулі. Якщо форма тіла є несферичною, то гравітаційний потенціал можна апроксимувати за допомогою суми ряду. Одним з варіантів представлення гравітаційного потенціалу є його розкладання по сферичним функціям [2]. Застосування сферичних функцій дає просту і зручну для практичного застосування аналітичну формулу для потенціалу.

Загальний підхід для моделювання гравітаційного поля планетарного тіла через сферичне гармонічне представлення:

$$U = \frac{Gm}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{\ell} \sum_{k=0}^{\ell} P_{\ell,k}(\sin \phi) [C_{\ell,k} \cos k\lambda + S_{\ell,k} \sin k\lambda], \quad (2.20)$$

де r – відстань від центру мас тіла, a_e – середній екваторіальний радіус тіла, що притягує, $C_{\ell,k}$, $S_{\ell,k}$ – коефіцієнти розкладання гравітаційного поля, r, ϕ, λ –

координати в сферичній системі відліку об'єкта в гравітаційному полі центрального тіла, $P_{\ell,k}$ – приєднані функції Лежандра.

Таке представлення гравітаційного потенціалу можна розглядати як три складових частин:

$$U = U_0 + U_1 + U_2. \quad (2.21)$$

Перша частина просто провідний член розкладання. Приєднана функція Лежандра, P_{00} приймає значення одиниця, як це робить коефіцієнт C_{00} . Таким чином, головний член просто:

$$U_0 = \frac{Gm}{r}. \quad (2.22)$$

Це потенціал тіла точкової маси, який використовуються для отримання основних результатів руху в задачі двох тіл.

Друга частина сферичного гармонічного подання є такими внесками (крім зазначеного внеску в задачі двох тіл), які не мають залежності від довготи. Такі умови, відповідають $k = 0$ і позначаються як зональний внесок в потенціал:

$$U_1 = \frac{Gm}{r} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{\ell} P_{\ell,0}(\sin \phi) C_{\ell,0}. \quad (2.23)$$

В моделі, друга зональна гармоніка, це вклад від планетного сплющення. Він є другим за величиною, після вкладу в загальний потенціал центрального тіла. Перша гармоніка дорівнює нулю, за умов, що центр нерухомої системи координат збігається з центром мас планети. Позначення J_{ℓ} часто використовується для позначення зональних коефіцієнтів замість зазначених вище $C_{\ell,0}$. Два позначення, просто відрізняються знаком:

$$J_{\ell} = -C_{\ell,0}, \quad (2.24)$$

так, що загальна частина потенціалу також може бути записана у вигляді:

$$U_1 = -\frac{Gm}{r} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{\ell} P_{\ell,0}(\sin \phi) J_{\ell}. \quad (2.25)$$

Частина сферичного гармонічного представлення що залишилася, є залежною від довготи:

$$U_2 = \frac{Gm}{r} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} P_{\ell,k}(\sin \phi) [C_{\ell,k} \cos k\lambda + S_{\ell,k} \sin k\lambda]. \quad (2.26)$$

Найбільший внесок в позовжньому потенціалі, як правило, вклад 2-го порядку і близько 2-го. Ці вклади є частиною потенціалу, у випадку коли форма планети відхиляється від сферичної навколо екваторіальної області. Як і в разі зонального коефіцієнта ступеня 1, коефіцієнти ступеня 1 і близько 1 будуть дорівнювати нулю за умови, що центр системи координат збігається з центром мас.

Тепер гармонічне представлення гравітаційного потенціалу можемо записати в наступному вигляді [2]:

$$\begin{aligned} U &= \frac{Gm}{r} \\ &+ \frac{Gm}{r} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{\ell} P_{\ell,0}(\sin \phi) C_{\ell,0}. \\ &+ \frac{Gm}{r} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} P_{\ell,k}(\sin \phi) [C_{\ell,k} \cos k\lambda + S_{\ell,k} \sin k\lambda]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

У загальному випадку, коли існують тимчасові варіації потенціалу (припливи), сферичне гармонічне представлення залишається в силі, хоча при цьому, коефіцієнти $C_{\ell,k}$, $S_{\ell,k}$ залежать від часу.

Сферичні гармоніки. Для того, щоб краще зрозуміти корисність сферичного гармонічного представлення геопотенціалу, потрібно більш детально розглянути сферичні гармонічні функції. Сферичні гармонічні функції утворені приєднаними функціями Лежандра з $\cos k\lambda$ і $\sin k\lambda$ які розв'язуються в рівнянні (2.20):

$$\begin{cases} A_{\ell,k}(\phi, \lambda) = P_{\ell,k}(\sin \phi) \cos k\lambda, \\ B_{\ell,k}(\phi, \lambda) = P_{\ell,k}(\sin \phi) \sin k\lambda. \end{cases} \quad (2.28)$$

Ці функції ортогональні. Таким чином, кожену функцію (при заданому ступені і порядку) можна розглядати в якості внеску незалежної інформації з амплітудою, заданою їх відповідними коефіцієнтами $C_{\ell,k}$, $S_{\ell,k}$.

На додаток до ортогональної, якісні форми сферичних гармонік легко візуалізувати. Зональні гармоніки (відповідні $k = 0$) не мають довготної залежності і мають k нулів між ± 90 градусами за широтою.

Всі незональні гармоніки мають поздовжні коливання. Присутність $\cos k\lambda$ і $\sin k\lambda$ дають значення ноль функції $2k$ по довготі. І функція Лежандра ступеню $\ell - k$ по широті є нульова. Так що, схожа на зональні, чим вище ступінь і порядок гармоніки тим більш тоншу і тоншу просторову структуру являє собою потенціал. Незональні коефіцієнти називаються тисеральними і для конкретного випадку $\ell = k$ вони називаються секторіальними.

Як правило, сферичні гармоніки можна розглядати так, як представляють варіації гравітаційного потенціалу, які мають довжини хвиль – окружності планети, розділену на k частин по довготі і поділеній на $\ell - k$ частин по широті.

Нормалізація. Коефіцієнти сферичних гармонік з'являються в рівнянні (2.48) і є ненормовані. Ці коефіцієнти, як правило, дуже малі за значенням в сторону збільшення ступеня. Це є наслідком того, що функції Лежандра, як правило, зростають до великих значень, при збільшенні ступеня. Таким чином, є сенс виконати нормалізацію приєднаних функцій Лежандра та коефіцієнтів. Нормалізація досягається шляхом множення приєднаних функцій Лежандра на масштабний коефіцієнт в залежності від ступеня і порядку функції. Позначаючи нормовані значення, межею зверху, нормовані приєднані функції Лежандра [2]:

$$\bar{P}_{\ell,k} = \left[2 - \delta_{k0} \quad 2\ell + 1 \quad \frac{\ell - k !}{\ell + k !} \right]^{1/2} P_{\ell,k}, \quad (2.29)$$

де δ_{k0} – символ Кронекера, дорівнює один, якщо k дорівнює нулю і дорівнює нулю, якщо k більше нуля. Зворотні нормовані коефіцієнти гравітаційного потенціалу $C_{\ell,k}$, $S_{\ell,k}$ це масштабний фактор:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{\ell,k} \\ \bar{S}_{\ell,k} \end{array} \right\} = \left[\frac{1}{2 - \delta_{k0}} \frac{\ell - k !}{2\ell + 1} \frac{1}{\ell + k !} \right]^{-1/2} \left\{ \begin{array}{l} C_{\ell,k} \\ S_{\ell,k} \end{array} \right\}. \quad (2.30)$$

Тепер гравітаційний потенціал, в розкладенні по сферичним гармонікам (2.20) з використанням нормованих величин, можемо записати в наступному вигляді:

$$U = \frac{Gm}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{\ell} \sum_{k=0}^{\ell} \bar{P}_{\ell,k}(\sin \phi) \left[\bar{C}_{\ell,k} \cos k\lambda + \bar{S}_{\ell,k} \sin k\lambda \right]. \quad (2.31)$$

Як правило, це кращий вигляд для чисельних реалізацій сферичного гармонічного представлення. Для багатьох аналітичних розглядів (таких, як вплив при орбітальному русі), легше працювати з ненормованою формою (2.27).

Приєднані функції Лежандра. Оцінка сферичних гармонік вимагає оцінки функцій Лежандра. Їх оцінку найбільш зручно проводити за допомогою рекурентних співвідношень. В приєднаних функціях Лежандра ℓ – ступінь, k – порядок [2]:

$$P_{\ell,k}(x) = \frac{1 - x^2}{2^{\ell}} \sum_{h=0}^{k/2} \frac{2^{\ell-k}}{h! (\ell - h)! (\ell - k - 2h)!} (-1)^h x^{\ell - k - 2h}. \quad (2.32)$$

Рекурентні співвідношення для оцінки цих функцій, як правило, представляють в одній з двох форм. Будь який підхід дозволяє обчислити всі необхідні функції Лежандра, які легко обчислюються за формулами:

$$P_{\ell,\ell}(x) = \frac{2^{\ell-1} !}{2^{\ell-1} (\ell - 1)!} (1 - x^2)^{\ell/2}, \quad (2.33)$$

$$P_{\ell, \ell-1} x = \frac{x}{1-x^2} P_{\ell, \ell} x. \quad (2.34)$$

Перша рекурсія застосовується для обчислення $P_{\ell, \ell} x$, $P_{\ell, \ell-1} x$, а потім обчислюються функції для усіх нижчих порядків ступеня, використовуючи:

$$P_{\ell, \ell} x = \frac{1}{\ell-k} \frac{1}{\ell-k+1} \left[2k+1 \frac{x}{1-x^2} P_{\ell, k+1} x - P_{\ell, k+2} x \right]. \quad (2.35)$$

Альтернативне обчислення рекурентної функції для $P_{\ell, \ell} x$, $P_{\ell, \ell-1} x$:

$$P_{\ell, \ell} x = \frac{1}{\ell-k} \left[2\ell-1 x P_{\ell-1, k} x - \ell+k-1 P_{\ell-2, k} x \right]. \quad (2.36)$$

Рекурентні співвідношення також можна переписати безпосередньо через нормовані приєднані функції Лежандра:

$$\bar{P}_{\ell, k}^* x = 2k+1 \left[\frac{1}{\ell+k+1} \frac{1}{\ell-k} \right]^{1/2} \frac{x}{1-x^2} \bar{P}_{\ell, k+1}^* x - \left[\frac{\ell+k+2}{\ell+k+1} \frac{\ell-k-1}{\ell-k} \right]^{1/2} \bar{P}_{\ell, k+2}^* x. \quad (2.37)$$

де $\bar{P}_{\ell, k}^* = \bar{P}_{\ell, k}^*$ якщо $k > 0$ і $\bar{P}_{\ell, 0}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{P}_{\ell, 0}^*$ якщо $k = 0$.

Рекурентна функція еквівалентна рівнянню (2.35) у нормованому вигляді:

$$\bar{P}_{\ell, k} x = \left[\frac{2\ell-1}{\ell-k} \frac{2\ell+1}{\ell+k} \right]^{1/2} x \bar{P}_{\ell-1, k} x - \left[\frac{2\ell+1}{2\ell-3} \frac{\ell+k-1}{\ell-k} \right]^{1/2} \bar{P}_{\ell-2, k} x. \quad (2.38)$$

Гравітаційне прискорення. Гравітаційне прискорення в будь-якому місці отримують шляхом обчислення градієнта потенціалу. Оскільки потенціал задається як функція від нерухомих сферичних координат, найбільш зручно обчислювати градієнт в тій же системі. У сферичних координатах, цей градієнт має вигляд [2]:

$$\vec{a} = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \vec{u}_\phi + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \vec{u}_\lambda, \quad (2.39)$$

де $\vec{u}_r, \vec{u}_\phi, \vec{u}_\lambda$ одиничні вектори базису r, ϕ, λ . Вектор прискорення, отриманий з цього виразу буде інерційним прискоренням матеріальної точки. Для більшості додатків буде бажано мати компоненти прискорення, виражені в інерціальній системі координат. Це досягається шляхом застосування відповідного перетворення координат від сферичних координат до бажаної системи координат. Підставляючи в гравітаційний потенціал (2.23), зазначені частини з формули (2.36) отримуємо вектор прискорення:

$$\begin{aligned} \vec{a} = & \left\{ -\frac{Gm}{r^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \left(\frac{a_e}{r} \right)^\ell \sum_{k=0}^{\ell} P_{\ell,k}(\sin \phi) [C_{\ell,k} \cos k\lambda + S_{\ell,k} \sin k\lambda] \right\} \vec{u}_r \\ & + \left\{ \frac{Gm}{r^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^\ell \sum_{k=0}^{\ell} \frac{\partial P_{\ell,k}(\sin \phi)}{\partial \phi} [C_{\ell,k} \cos k\lambda + S_{\ell,k} \sin k\lambda] \right\} \vec{u}_\phi \\ & + \left\{ \frac{Gm}{r^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^\ell \sum_{k=1}^{\ell} k \frac{P_{\ell,k}(\sin \phi)}{\cos \phi} [-C_{\ell,k} \sin k\lambda + S_{\ell,k} \cos k\lambda] \right\} \vec{u}_\lambda. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Звертаємо увагу на те, що головний член радіальної складової (для якого ступень і порядок дорівнює нулю), - це гравітаційне прискорення в задачі двох тіл $-\frac{Gm}{r^2}$. Крім того, якщо використовуються тільки зональні умови ($k = 0$), то поздовжня складова прискорення дорівнює нулю.

Коефіцієнти $C_{\ell,k}, S_{\ell,k}$ залежать від форми тіла і розподілу мас усередині нього і є безрозмірними. Для великих планет, Сонця і Місяця, відома велика кількість цих коефіцієнтів.

При розгляді моделі гравітаційного поля астероїда, малого тіла Сонячної системи, прийнято спрощення, яке полягає в тому, що густина ρ по всьому об'єму астероїда є константою, та поверхня астероїда апроксимується тривісним еліпсоїдом.

На Рис. 2.2 і Рис. 2.3, як приклад, показана варіація нахил орбіти супутників "Beta" і "Gamma" астероїда 1999СС з врахуванням асиметрії центрального астероїда [74].

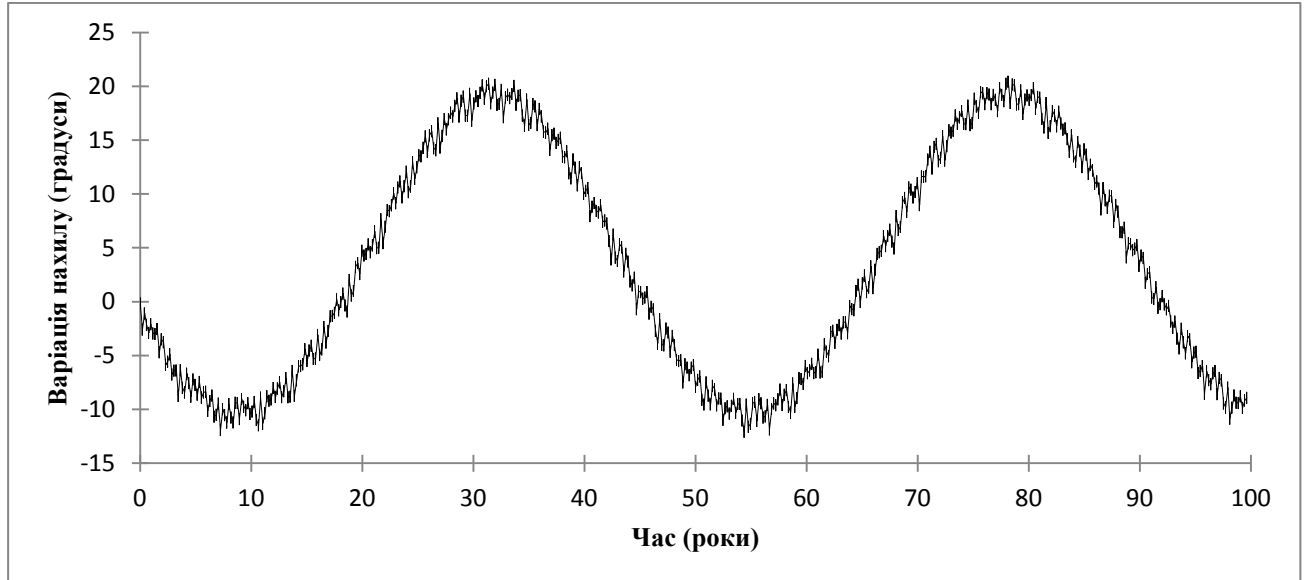


Рис. 2.2. Варіація нахилу орбіти супутника "Beta" астероїда 1999СС з врахуванням асиметрії центрального астероїда

Розглянемо коефіцієнти $C_{\ell,k}$, $S_{\ell,k}$ для астероїда [74]. Оскільки початок системи координат знаходиться в центрі тіла, перші коефіцієнти розкладання гравітаційного поля дорівнюють нулю. Якщо $\ell = 2$ и $k = 0, k = 1, k = 2$, то отримаємо наступні рівності [53]:

$$\begin{cases} C_{20} = \frac{2C - (A+B)}{2ma_e^2}, & S_{20} = 0, \\ C_{21} = \frac{E}{ma_e^2}, & S_{21} = \frac{D}{ma_e^2}, \\ C_{22} = \frac{B-A}{4ma_e^2}, & S_{22} = \frac{F}{2ma_e^2}, \end{cases} \quad (2.41)$$

де A, B, C – осьові моменти інерції, D, E, F – відцентрові моменти інерції, m – маса астероїда.

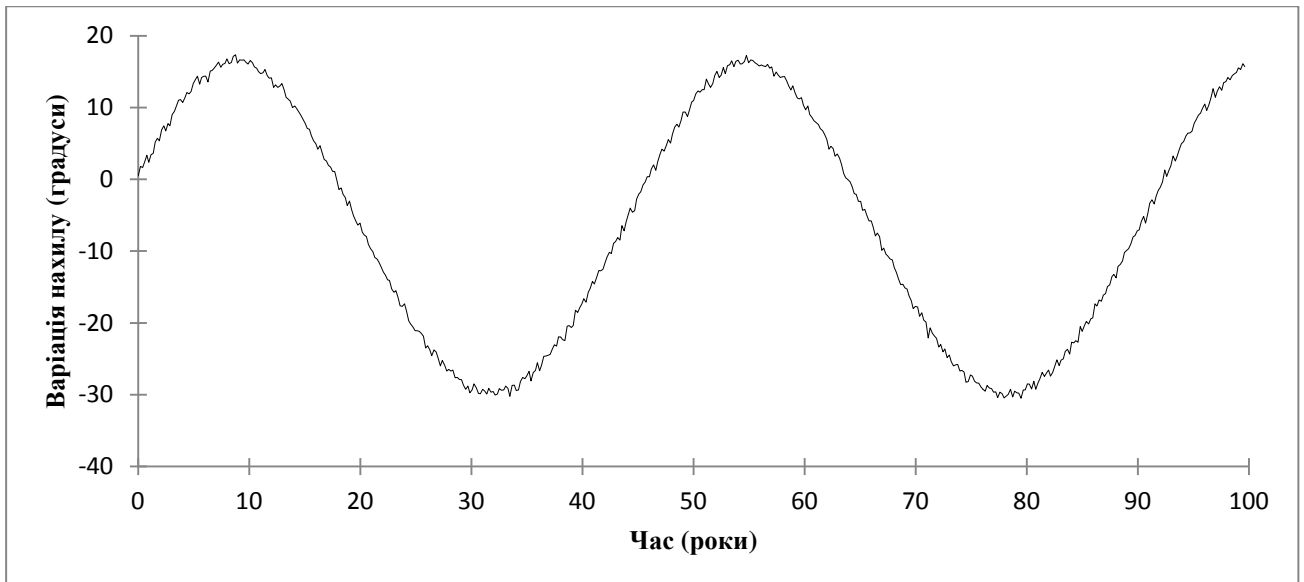


Рис. 2.3. Варіація нахилу орбіти супутника "Гамма" астероїда 1999СС з врахуванням асиметрії центрального астероїда

Виходячи з наближення форми астероїда трьохосним еліпсоїдом, маємо:

$$\begin{aligned}
 A &= \int b^2 + c^2 \, dm = \rho \int b^2 + c^2 \, dV = \rho \iiint b^2 + c^2 \, dadbdc = \\
 &= \rho \iint \int b^2 + c^2 \, da \, dbdc = \rho \int \int b^2 a + c^2 a \, db \, dc = \\
 &= \rho \int \left(\frac{b^3}{3} a + c^2 ab \right) dc = \rho \left(\frac{1}{3} b^3 ac + \frac{1}{3} z^3 ab \right) + Const
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \int a^2 + c^2 \, dm = \rho \int a^2 + c^2 \, dV = \rho \iiint a^2 + c^2 \, dadbdc = \\
 &= \rho \iint \int a^2 + c^2 \, da \, dbdc = \rho \int \left(\int \left(\frac{a^3}{3} + c^2 a \right) db \right) dc = \\
 &= \rho \int \left(\frac{a^3}{3} b + c^2 ab \right) dc = \rho \left(\frac{1}{3} a^3 bc + \frac{1}{3} z^3 ab \right) + Const
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= \int a^2 + b^2 \, dm = \rho \int a^2 + b^2 \, dV = \rho \iiint a^2 + b^2 \, dadbdc = \\
 &= \rho \iint \int a^2 + b^2 \, da \, dbdc = \rho \int \left(\int \left(\frac{a^3}{3} + b^2 a \right) db \right) dc = \\
 &= \rho \int \left(\frac{a^3}{3} b + \frac{b^3}{3} a \right) dc = \rho \left(\frac{1}{3} a^3 bc + \frac{1}{3} b^3 ac \right) + Const
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= \int bcdm = \rho \int bcdV = \rho \iiint bcdadbdc = \rho \iint \int bcda \, dbdc = \\
&= \rho \int \int abcdb \, dc = \rho \int \frac{1}{2} ab^2 cdc = \rho \frac{1}{4} ab^2 c^2 + Const, \\
E &= \int acdm = \rho \int acdV = \rho \iiint acdadadbdc = \rho \iint \int acda \, dbdc = \\
&= \rho \int \left(\int \frac{1}{2} a^2 cdb \right) dc = \rho \int \frac{1}{2} a^2 bc dc = \rho \frac{1}{4} a^2 bc^2 + Const, \\
F &= \int abdm = \rho \int abdV = \rho \iiint abdadbdc = \rho \iint \int abda \, dbdc = \\
&= \rho \int \left(\int \frac{1}{2} a^2 bdb \right) dc = \rho \int \frac{1}{4} a^2 b^2 dc = \rho \frac{1}{4} a^2 b^2 c + Const,
\end{aligned} \tag{2.42}$$

де a, b, c – півосі апроксимуючого еліпсоїда.

2.3 Прискорення від приливної деформації астероїда

В результаті тяжіння супутника на кожен елемент центрального астероїда діє сила і викликає приливну деформацію. Внаслідок цієї деформації, тяжіння астероїда змінюється, виникають сили, які характеризуються додатковим прискоренням [19]:

$$\begin{cases} a_{Tx} = \frac{Gm_{St}a_e^5}{x_{ASt}^6} P_2 \cos \theta , \\ a_{Ty} = \frac{Gm_{St}a_e^5}{y_{ASt}^6} P_2 \cos \theta , \\ a_{Tz} = \frac{Gm_{St}a_e^5}{z_{ASt}^6} P_2 \cos \theta , \end{cases} \tag{2.43}$$

де m_{St} – маса супутника астероїда, $r_{ASt}(x_{ASt}, y_{ASt}, z_{ASt})$ – вектор положення супутника щодо астероїда. У нашому випадку кут $\theta = 0^\circ$ (кут між напрямом на

супутник і приливним горбом), в результаті $\cos \theta = 1 \Rightarrow P_2 \cos \theta = 1$, тоді вираз (2.43) приймає вигляд:

$$\begin{cases} a_{Tx} = \frac{Gm_{St} a_e^5}{x_{ASt}^6}, \\ a_{Ty} = \frac{Gm_{St} a_e^5}{y_{ASt}^6}, \\ a_{Tz} = \frac{Gm_{St} a_e^5}{z_{ASt}^6}. \end{cases} \quad (2.44)$$

2.4 Прискорення, зумовлене Сонцем, великими планетами і супутниками планет

Прискорення, зумовлене Сонцем, вісьмома великими планетами і супутниками планет a_B розраховуємо за допомогою наступного виразу [53]:

$$\begin{cases} a_{Bx} = Gm_B \left(\frac{x_B - x_{St}}{r_o^3} - \frac{x_B}{r_B^3} \right), \\ a_{By} = Gm_B \left(\frac{y_B - y_{St}}{r_o^3} - \frac{y_B}{r_B^3} \right), \\ a_{Bz} = Gm_B \left(\frac{z_B - z_{St}}{r_o^3} - \frac{z_B}{r_B^3} \right), \end{cases} \quad (2.45)$$

де r_o – відстань від центру мас масивного тіла Сонячної системи (Сонця, планети, супутника планети) до супутника, r_B – відстані від масивного тіла Сонячної системи (Сонця, планети, супутника планети) до центрального астероїда даної системи, m_B – маса масивного тіла Сонячної системи (Сонця, планети, супутника планети), x_{St}, y_{St}, z_{St} – координати супутника астероїда, x_B, y_B, z_B – координати масивного тіла Сонячної системи (Сонця, планети, супутника планети) в астероїдоцентричній системі координат.

2.5 Тиск сонячного світла. Тіньова функція

В теорії руху супутників астероїдів необхідно враховувати і тиск сонячного світла на їх поверхню. Для цього використовується прискорення a_{Lp} , обумовлене тиском сонячного світла [50], [77].

Для обліку світлового тиску необхідний перехід від традиційної моделі гравітаційного поля в космічному просторі до моделі фотогравітаційного поля, в якому поряд з гравітаційним притяганням існує і радіаційне відштовхування. зміна орбітальної енергії тіла призводить до еволюції його орбіти, темп і інтенсивність якої визначається рівнем впливу сил світлового тиску на це тіло. Як відомо, сила світлового тиску визначається формулою [50]:

$$\vec{F}_{\odot}^{rad} = k_A \frac{E r S}{c_L} \vec{e} = k_A \frac{L_{\odot} S}{4\pi r^2 c_L} \vec{e}, \quad (2.46)$$

де $E r = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2}$ – освітленість на відстані r від Сонця, L_{\odot} – світимість Сонця, S – міделевий переріз супутника астероїда, c_L – швидкість світла, k_A – оптичний коефіцієнт астероїда (супутника астероїда), \vec{e} – одиничний вектор радіального геліоцентричного напрямку. Оскільки сила тяжіння:

$$\vec{F}_{\odot}^{gr} = -G \frac{m m_{\odot}}{r^2} \vec{e}, \quad (2.47)$$

де m_{\odot} – маса Сонця, m – маса супутника астероїда, сума сил може бути представлена у наступному вигляді:

$$\vec{F}_{\odot} = \vec{F}_{\odot}^{gr} + \vec{F}_{\odot}^{rad} = -G \frac{m m_{\odot}}{r^2} \vec{e} + k_A \frac{L_{\odot} S}{4\pi r^2 c_L} \vec{e} = -G \frac{m m_{\odot}}{r^2} (1 - \beta) \vec{e} = -G \frac{m m'_{\odot}}{r^2} \vec{e}, \quad (2.48)$$

де $\beta = k_A \frac{S Q_{\odot}}{m G m_{\odot}}$ – фотогравітаційна редукція маси Сонця, $Q_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi c_L}$ – допоміжна константа, $m'_{\odot} = m_{\odot} (1 - \beta)$ – скорочена маса Сонця. В загальному

випадку оптична модель поверхні астероїда витікає з припущення про переважання дифузного характеру перевипромінювання світла, при чому умова безперервності потоку світлової енергії є:

$$\alpha + \rho + \delta = 1, \quad (2.49)$$

де α – коефіцієнт поглинання, $\rho + \delta$ – коефіцієнт відбиття, що складається з коефіцієнтів дзеркального відображення ρ і дифузного відображення δ . Для дифузного перевипромінювання оптичний коефіцієнт має вигляд [50]:

$$k_A = \alpha + \rho + \frac{13}{9} \delta. \quad (2.50)$$

Для природного тіла приймаємо, що дзеркальне відображення відсутня ($\rho = 0$), а коефіцієнт дифузного віддзеркалення δ є геометричне альbedo астероїда. Отже, для неточкового сферичного дифузно відображаючого протяжного тіла [50]:

$$\begin{cases} \alpha = 1 - \delta, \\ k_A = \alpha + \frac{13}{9} \delta = 1 + \frac{4}{9} \delta. \end{cases} \quad (2.51)$$

В справжніх розрахунках альbedo поверхні астероїда приймають в межах від нуля до одиниці $\delta \in 0;1$. Таким чином, для будь якого альbedo можна знайти пропорційний оптичний коефіцієнт $k_A \in 1;1.44$. Якщо протяжний астероїд рахувати чорним тілом, то його оптичний коефіцієнт $k = \alpha = 1$, тобто в першому наближенні можемо рахувати, що все випромінювання поглинається і не призводить до нагріву астероїда, а вся поглинута енергія переходить в орбітальний рух. Для точкового астероїда оптичний коефіцієнт $k = 0$, збурення немає.

Таким чином, прискорення від тиску сонячного світла, можемо записати в наступному вигляді:

$$\begin{cases} a_{Lpx} = \left(1 + \frac{4}{9}\delta\right) q \frac{S}{m} \Psi\left(\frac{r_s}{r_0}\right) \frac{x_{St} - x_S}{r_0}, \\ a_{Lpy} = \left(1 + \frac{4}{9}\delta\right) q \frac{S}{m} \Psi\left(\frac{r_s}{r_0}\right) \frac{y_{St} - y_S}{r_0}, \\ a_{Lpz} = \left(1 + \frac{4}{9}\delta\right) q \frac{S}{m} \Psi\left(\frac{r_s}{r_0}\right) \frac{z_{St} - z_S}{r_0}, \end{cases} \quad (2.52)$$

де $q = 4,5605 \cdot 10^{-6} \frac{H}{M^2}$ – сонячна стала Ψ – тіньова функція, r_s – відстань астероїда від Сонця. x_A, y_A, z_A – координати астероїда, x_S, y_S, z_S – координати Сонця.

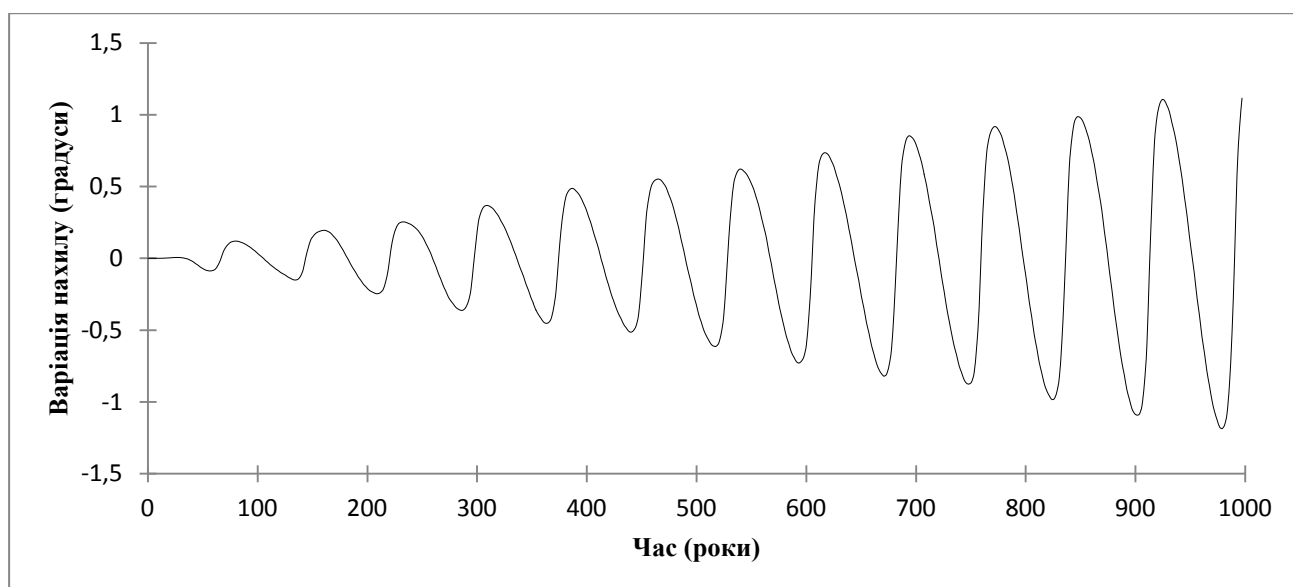


Рис. 2.4. Варіація нахилу орбіти супутника астероїда 1999KW4 з врахуванням тиску сонячного світла

У систему рівнянь (2.52), входить тіньова функція. Розглянемо докладніше як вона обчислюється для нашої системи. В 1963 році Ферраз-Мелло [26] запропонував ввести поняття тіньової функції Ψ . Ця функція дорівнює одиниці, коли супутник освітлений Сонцем, і дорівнює нулю, коли він знаходиться в тіні. У першому наближенні вважають, що тінь має циліндричну форму, але, коли потрібна краща точність, передбачається, що тінь конічна.

Якщо Ψ тіньова функція, тоді для циліндричної тіні отримаємо:

$$\Psi = \begin{cases} 0, & -\varphi < \lambda < \varphi, \\ 1, & -\pi < \lambda < -\varphi, \varphi < \lambda < \pi. \end{cases} \quad (2.53)$$

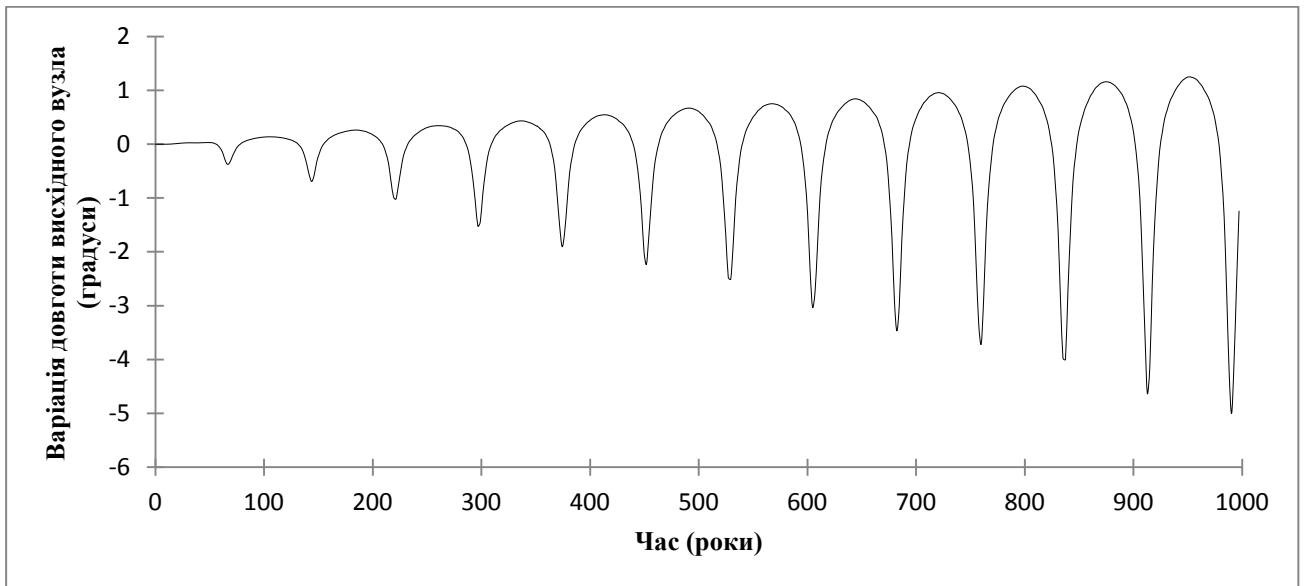


Рис. 2.5. Варіація довготи висхідного вузла орбіти супутника астероїда 1999KW4 з врахуванням тиску сонячного світла

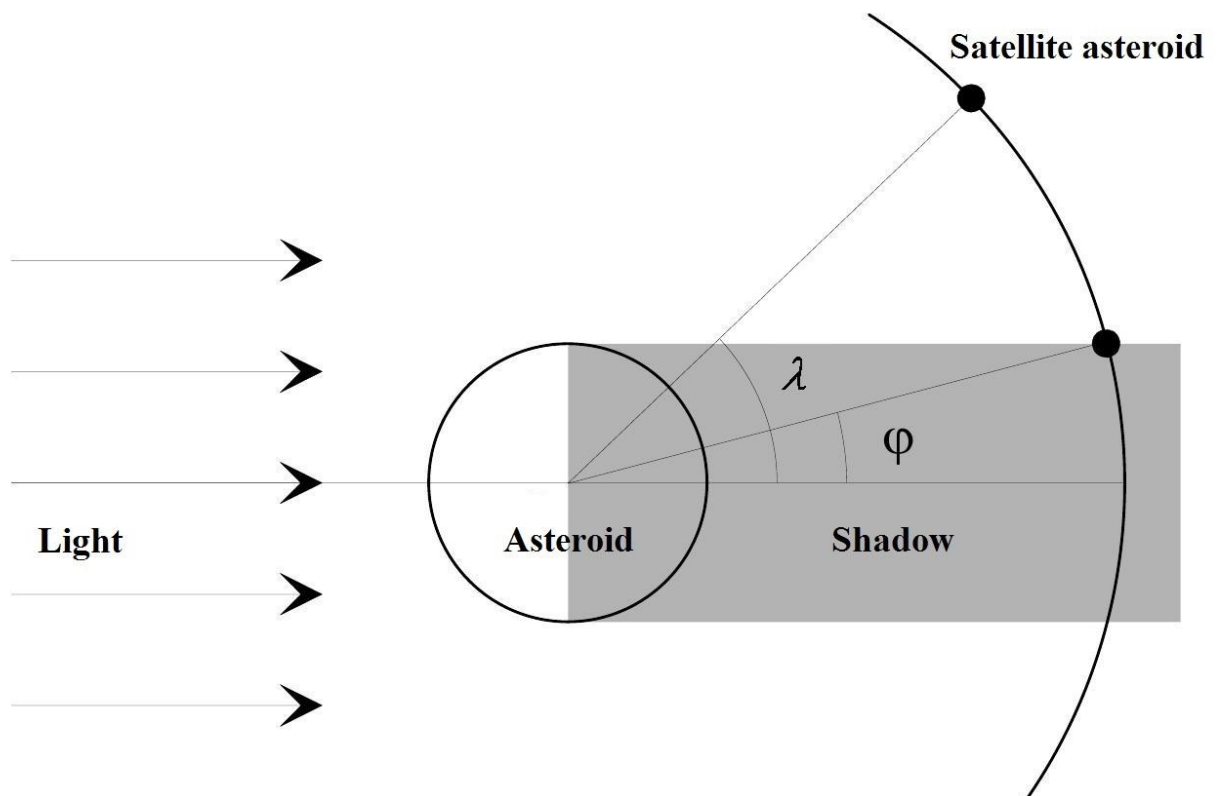


Рис. 2.6. Геометрична модель циліндричної тіні

На Рис 2.4 та Рис 2.5 показана варіація нахилу і довготи висхідного вузла орбіти супутника астероїда 1999KW4 з врахуванням тиску сонячного світла [77].

У нашій чисельній моделі руху використовується модель тіні – конус, що дозволяє більш точно визначити моменти входу супутника в тінь і виходу з тіні. Тоді для конічної тіні отримаємо:

$$\Psi = \begin{cases} 0, \frac{x_{St}^2}{a_c^2} + \frac{y_{St}^2}{b_c^2} - \frac{z_{St}^2}{c_c^2} = 0, \\ 1, \frac{x_{St}^2}{a_c^2} + \frac{y_{St}^2}{b_c^2} - \frac{z_{St}^2}{c_c^2} = 1, \end{cases} \quad (2.54)$$

де a_c , b_c , c_c – осі конуса.

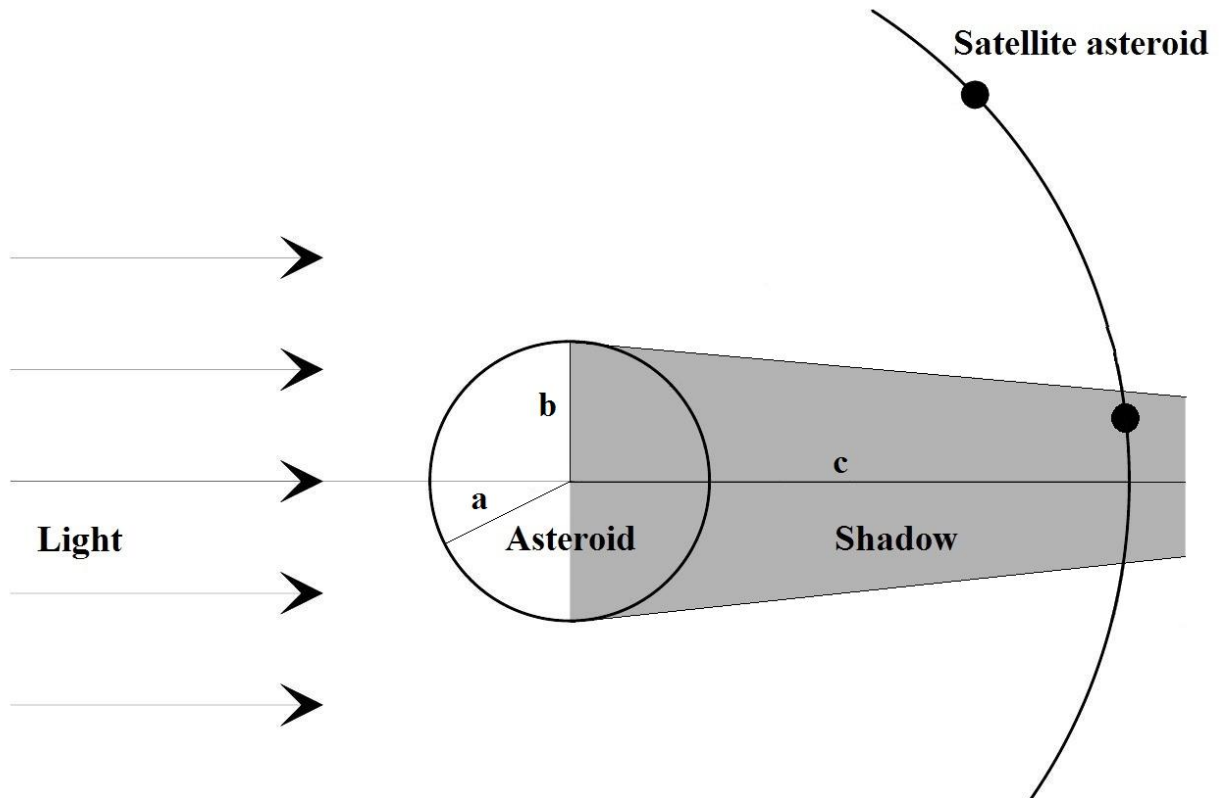


Рис. 2.7. Геометрична модель конічної тіні

При такому поданні форми тіні, можливе врахування зміни основи конуса (перпендикулярного перерізу астероїда до напрямку на Сонце). Величину b_c , для різних орієнтацій, можемо знайти з наступного виразу:

$$b_c = b + (a - b) \times (y_s / r_0). \quad (2.55)$$

Короткі висновки до Розділу 2

В Розділі 2 розглянуті структурні складові чисельної моделі, що використовується для ретельного вивчення еволюції орбіт супутників систем малих тіл. Наведені рівняння руху в координатній формі. Розглянуті методи врахування асиметрії компонентів системи, приливних горбів, тиску світла з урахуванням тіньової функції.

РОЗДІЛ 3. ЕВОЛЮЦІЯ АСТЕРОЇДНИХ СИСТЕМ

3.1 Розрив подвійних і кратних астероїдних систем приливними силами планет

Було висловлено припущення, що в результаті YORP-ефекту, при збільшенні швидкості обертання астероїдів неправильної форми під дією фотонів через нерівномірне альbedo поверхні, швидкість обертання астероїда може зрости настільки, що приливні сили розірвуть його на дві частини [82].

Стійкість подвійного астероїда визначається не тільки гравітаційними збуреннями з боку Сонця і планет, але і приливною взаємодією самих компонентів подвійної системи.

Розглянемо задачу дослідження подвійних і кратних астероїдів, один з компонентів яких внаслідок великої маси будемо вважати головним, а інші – його супутниками. Для того, щоб астероїд втримав біля себе супутник, потрібно, щоб прискорення від головного астероїда перевищувало сумарні прискорення на супутник і астероїд від збурюючої планети.

Розглянемо випадок, коли планета, головний астероїд і його супутник знаходяться на одній прямій. В такому випадку різниця прискорень компонентів астероїдної системи, щодо великої планети, буде максимальною. Відповідно, відстань відриву меншого компонента астероїдної системи також буде максимальною.

Різниця прискорень в системі координат одного нерухомого центру, коли супутник знаходиться між планетою і астероїдом можна записати у вигляді [75]

$$\Delta a = \frac{GM_{\Pi}}{r-d} - \frac{GM_{\Pi}}{r^2} = \frac{GM_{\Pi}}{r^2} \left(\frac{1}{\left(1-\frac{d}{r}\right)^2} - 1 \right), \quad (3.1)$$

де M_{II} – маса планети, r – планетоцентрична відстань астероїдної системи, d – відстань між астероїдом і його супутником.

Спрощуючи вираз у великих дужках і нехтуючи членами $\left(\frac{d}{r}\right)^2$ порівняно з $\frac{2d}{r}$, і $\frac{d}{r}$ порівняно з 1, так як $d \ll r$, отримуємо:

$$\Delta a \approx \frac{2GM_{II}}{r^3} d. \quad (3.2)$$

Відстань r знаходимо з умов:

$$\frac{GM_A}{d^2} = \frac{2GM_{II}}{r^3} d, \quad (3.3)$$

де M_A – маса головного астероїда.

Остаточно отримуємо:

$$r = \left(\frac{2M_{II}}{M_A}\right)^{\frac{1}{3}} d. \quad (3.4)$$

Як бачимо, в першому наближенні відстань відриву компонента системи залежить лише від взаємної відстані d між компонентами та їх маси.

У Додатку В наведені власні розрахунки критичних відстаней, на які повинні зблизитися кожна з 168 систем, для яких відомі відстані між компонентами та маси, з кожною з великих планет Сонячної системи, щоб стався відрив супутника від головного астероїда.

Проведені автором чисельні розрахунки на проміжку часу 20000 років показують, що не одна з розглянутих 168 систем при сучасних значеннях елементів їх орбіт, не зближуються з великими планетами.

3.2 Резонанси в астероїдних системах

Вже давно відомі резонанси в Сонячній системі. Вони спостерігаються в елементах орбіт Юпітера, Сатурна і Нептуна, викликаючи значні збурення в русі

цих планет. Відкрито резонанси супутників в системах Юпітера, Сатурна, Урана, Нептуна. Пояс астероїдів також має резонансну структуру, люки Кірквуда обумовлені резонансом астероїдів Головного поясу з Юпітером. У транснептунових об'єктів теж зустрічаються резонанси з Юпітером і Нептуном. Завдання автора показати наявність різного виду резонансів у відомих на даний момент астероїдних системах.

Якщо періоди обертання двох супутників астероїда відносяться як цілі невеликі натуральні числа, то такі супутники рухаються в орбітальному резонансі.

Розглянемо орбітальний резонанс, в одинадцяти відомих потрійних астероїдних системах. В Таблиці 3.1 наведені коефіцієнти резонансів супутників астероїдів, обчислені за формулою (3.5) в межах похибки спостережень. У астероїдній системі (136108) Naumea супутники не знаходяться в орбітальному резонансі [76].

$$N_1 \times P_1 - N_2 \times P_2 \approx 0, \quad (3.5)$$

де N_1 і N_2 – коефіцієнти орбітального резонансу першого і другого супутника відповідно, P_1 і P_2 – орбітальні періоди обертання супутників.

Таблиця 3.1.

Орбітальний резонанс супутників потрійних астероїдів

Астероїдна система	$N_1 : N_2$
(45) Eugenia	3:8
(87) Sylvia	3:8
(93) Minerva	6:13
(130) Elektra	1:5
(216) Kleopatra	1:2
(2577) Litva	143:1
(3749) Balam	1:44
(47171)1999 TC36	53:2
(136617) 1994 CC	7:1
(153591) 2001 SN263	1:9

Якщо період обертання навколо осі головного астероїда або супутника, відноситься до періоду обертання супутника навколо головного астероїда як цілі невеликі натуральні числа, то така система перебуває в *спін-орбітальному*

резонансі. Окремий випадок спін-орбітального резонансу 1:1 називається приливним захопленням або синхронним обертанням (характерним прикладом такого резонансу є система Земля-Місяць). У Таблиці 3.2 наведені результати обчислень спін-орбітальних резонансів супутників подвійних і кратних астероїдів, отриманих за формулою (3.5), де P_1 – період обертання супутника або головного астероїда навколо своєї осі, P_2 – період обертання супутника навколо астероїда, N_1 і N_2 – коефіцієнти орбітального резонансу. Для астероїдних систем (88611) Teharonhiawako і 2003 QY90 некоректно говорити про спін-орбітальні резонанси через великі співвідношення періодів, більш ніж 1000:1.

Вид резонансу коли, період обертання головного компонента навколо своєї осі і період обертання супутника навколо своєї осі відносяться як цілі невеликі натуральні числа, називається *спін-спіновим* резонансом. Нижче (Таблиця 3.2) наведені приклади таких систем.

Таблиця 3.2.

Спін-орбітальні і спін-спінові резонанси в обраних астероїдних системах

Астероїдна система	$\frac{N_{SpinSatellite}}{N_{PeriodSatellite}}$:	$\frac{N_{SpinAsteroid}}{N_{PeriodSatellite}}$:	$\frac{N_{SpinAsteroid}}{N_{SpinSatellite}}$:
(90) Antiope	1:1	1:1	1:1
(809) Lundia	1:1	1:1	1:1
(939) Isberga	1:1	9:1	9:1
(1139) Atami	1:1	1:1	1:1
(2006) Polonskaya	3:1	6:1	2:1
(2478) Tokai	1:1	1:1	1:1
(2577) Litva	6:1	13:1	2:1
(3309) Brorfelde	1:1	7:1	7:1
(4868) Knushevia	1:1	4:1	4:1
(4951) Iwamoto	1:1	1:1	1:1
(5381) Sekhmet	1:1	5:1	4:1
(5426) Sharp	1:1	5:1	5:1
(7369) Gavrilin	1:1	1:1	1:1
(8474) Rettig	1:1	1:1	1:1
(15430) 1998 UR31	1:1	9:1	9:1
(16525) Shumarinaiko	1:1	6:1	6:1
(16635) 1993 QO	16:1	4:1	1:4
(18890) 2000 EV26	1:1	4:1	4:1
(27568) 2000 PT6	1:1	5:1	5:1
(66391) 1999 KW4	1:1	6:1	6:1

(69230) Hermes	1:1	1:1	1:1
(88611) Teharonhiawako	-	-	1:1
(175706) 1996 FG3	1:1	6:1	6:1
(285263) 1998 QE2	24:1	7:1	1:4
(311066) 2004 DC	3:1	9:1	3:1
(399307) 1991 RJ2	1:1	5:1	5:1
(399774) 2005 NB7	1:1	4:1	4:1
2003 QY90	-	-	2:1

Якщо головний астероїд і супутник знаходяться в спін-спіновому резонансі 1:1, говорять, що система досягла стану повного приливного уповільнення обертання [53] складових її тіл. В кінці процесу приливного уповільнення головний астероїд і його супутник виявляються весь час оберненими один до одного однією стороною.

3.3 Динаміка кілець астероїда (10199) Chariklo

У 2014 році було повідомлено про відкриття [11] двох кілець навколо (10199) Chariklo і він став п'ятим об'єктом Сонячної системи у якого виявлена система кілець, після Юпітера, Сатурна, Урана і Нептуна. Головний компонент системи є найбільшим кентавром. Автором розглянуто час ерозії кілець в астероїдній системі (10199) Chariklo, що відбувається через низку ефектів. Також, визначена маса і період обертання передбачуваного супутника–пастуха даного астероїда [78].

Орбіта (10199) Chariklo знаходиться між орбітами Сатурна і Урана, його афелійна відстань більше ніж перигелійна відстань Урана. Астероїдна система обертається в резонансі 4:3 (62.53:83.53 років) з Ураном. В Таблиці 3.3 наведені Кеплерови елементи орбіти цієї астероїдної системи [96].

Виявлено, що астероїд оточений двома вузькими і щільними кільцями $C1R$ і $C2R$ шириною 6600 і 3800 метрів з оптичною густиною 0.38 і 0.06 відповідно. Радіуси кілець дорівнюють 390600 ± 3300 метрів і 404800 ± 3300 метрів відповідно. Відкриття кілець зроблено в рамках міжнародної спостережної програми під час покриття зорі UCAC4 248-108672 в 2013 році [11]. Після

відкриття було проведено ще ряд спостережень даного об'єкта, за результатами яких уточнювалися параметри системи [7]. Так само розглянута можливість розриву системи (розпад кілець), в результаті приливної впливу планет Сонячної системи [85], на проміжку часу до 1 млн. років.

Таблиця 3.3.

Орбітальні та фізичні параметри, головного астероїда

Велика піввісь	15.754190 AU
Ексцентриситет	0.1715941
Нахил	23.411663°
Аргумент перигелію	241.60058°
Висхідний вузол	300.379814°
Середня аномалія	60.13111°
Епоха	2014 май 23
<i>Діаметр</i>	248000 ± 18000 м [28]
<i>Габаритні розміри</i>	253800 × 289800 м [11]
<i>Сіновий період</i>	7.004 годин [83]

Вузькі, ексцентричні кільця повинні швидко ерозувати. Той факт, що ці кільця спостерігаються, означає або те, що ми живемо в особливу епоху, коли подібні кільця існують, або те, що є певний механізм утримування, який зберігає властивості кілець незмінними на тривалих інтервалах часу.

Розглянемо час "життя" кілець. Тобто ерозія нічим не утримуваних вузьких кілець має відбуватися через низку ефектів: взаємних зіткнень частинок кільця, ефекту Пойнтінга-Робертсона, диференціальної прецесії. Детальний вивід формул для часу ерозії кілець, розглянуто Murray and Dermot [53] у своїй книзі. В роботі Braga-Ribas та інших [11] розраховано час ерозії кілець астероїда через зіткнення частинок і ефекту Пойнтінга-Робертсона. Ми розрахували час ерозії через третій ефект – диференціальну прецесію кілець.

Стиснення центрального астероїда змушує витягнуту орбіту прецесувати з швидкістю, приблизно рівною [53]:

$$\dot{\omega} \approx \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_A}{a_{st}} \right)^2 T, \quad (3.6)$$

де J_2 – друга зональна гармоніка (0.014 ± 0.002), обчислена нами по раніше запропонованому алгоритму [74], R_A – радіус астероїда, a_{St} – велика піввісь орбіти (400300 ± 9700 м) ймовірного супутника-пастуха, T – середній період обертання (0.74 діб і 0.78 діб). Тому різниця значень $\dot{\omega}$ для внутрішнього і зовнішнього країв ексцентричного кільця (радіальна ширина кільця по великій осі його орбіти, різна) по великій піввісі задається формулою [53]:

$$\delta\dot{\omega} \approx -\frac{7}{2} \dot{\omega} \frac{W}{a_{St}}, \quad (3.7)$$

де W – радіальна ширина кільця. Отже, повинна існувати диференціальна прецесія, оскільки внутрішній край прецесує швидше, ніж зовнішній. Кільце ерозує за характерний час $\frac{2\pi}{|\delta\dot{\omega}|}$, що в наших розрахунках становить 1660_{-146}^{+151} діб для $C1R$ і 2760_{-67}^{+68} діб для $C2R$.

Відкриття вузьких кілець Урана дало поштовх розвитку теорії утримання кілець, всупереч зіткненню частинок, ефекту Пойнтінга-Робертсона і диференціальній прецесії. Присутність супутників-пастухів виявилася найбільш правдоподібним поясненням стійкості вузьких кілець. Було запропоновано [53], що вузьке кільце утримується супутником.

Припустимо, що люк в кільцях астероїдної системи утворений супутником, аналогічно тому як супутник Пан утворює люк Енке в кільці А Сатурна. Використовуючи формулу (3.8), виведену з виразу для сфери дії, оцінимо масу супутника-пастуха:

$$m_{St} = \frac{R^{5/2} M_A}{a_{St}^{5/2}} \approx (3.27 \pm 0.19) \times 10^{15} \text{ кг}, \quad (3.8)$$

де R – радіус (7100 ± 100 м) сфери дії [63] супутника-пастуха. Масу (M_A) астероїда (10199) Chariklo обчислили за формулою:

$$M_A = \frac{4}{3} \pi a b^2 \rho \approx 7.82 \times 10^{19} \text{ кг}, \quad (3.9)$$

де a – велика піввісь еліпсоїда астероїда (289800 м [11]), b – мала піввісь еліпсоїда астероїда (253800 м [11]), ρ – густина астероїда (10^3 кг/м³ [97]).

З уточненого закону Кеплера знайдемо період обертання супутника-пастуха навколо головного компонента астероїдної системи:

$$P = \frac{2\pi a_{St}^{3/2}}{\sqrt{G(M_A + m_{St})}} \approx 6.12_{-0.01}^{+0.23} \text{ годин,} \quad (3.10)$$

Період обертання головного компонента системи навколо своєї осі дорівнює 7.004 годин. Порівнюючи ці два періоди видно, що система наближається до стану синхронного обертання [53].

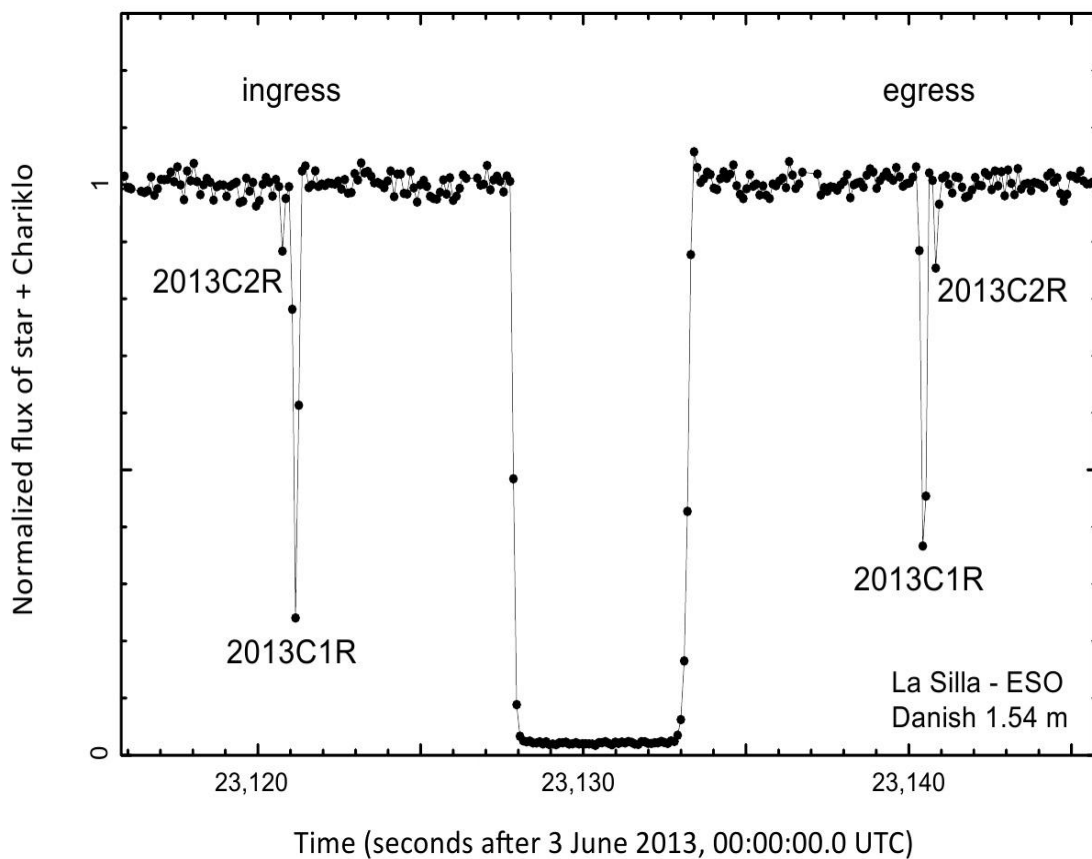


Рис. 3.1. Покриття астероїдом (10199) Chariklo зорі UCAC4 248-108672 в 2013 році [11]. На кривій блиску видно, як кільця перетинають промінь світла зорі

Відомі періоди обертання кілець *C1R* і *C2R* дорівнюють 0.74 доби і 0.78 доби [97] відповідно. Кільця наближаються до орбітально-орбітального резонансу 3:1 з передбачуваним супутником-пастухом.

3.4 Еволюція орбіт супутників обраних подвійних та кратних малих тіл Сонячної системи

Астероїдна система **(45) Eugenia** (Рис 3.2), складається з центрального астероїда Eugenia і двох супутників. Обидва супутники були відкриті за допомогою наземних телескопів з використанням адаптивної оптики [1].

Астроїд (45) Eugenia був відкритий 27 червня 1857 року Н. Goldschmidt в Paris, France. Альтернативне позначення: 1941 BN.

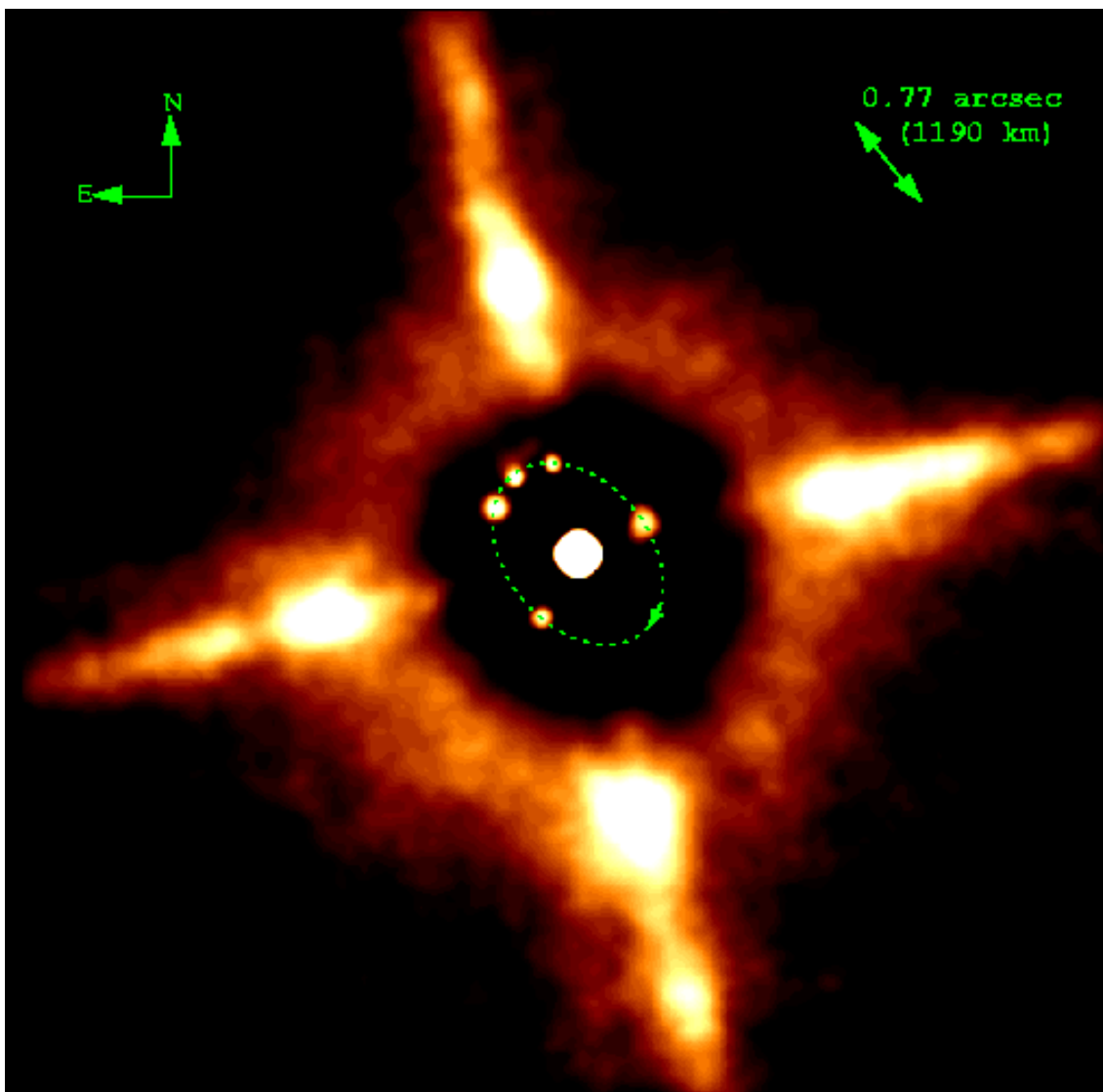


Рис. 3.2. Покадрова зйомка астероїда (45) Eugenia і його супутника, зроблена за допомогою телескопа CFHT [98]

Перший (зовнішній) супутник був відкритий 1 листопада 1998 року W.J. Merline, L.M. Close, C. Dumas, C.R. Chapman, F. Roddier, F. Menard, D.C. Slater, G. Duvert, C. Shelton і T. Morgan за допомогою телескопа CFHT Telescope, Mauna Kea, Hawaii, USA [52]. Зоряна величина супутника відрізняється від зоряної величини центрального астероїда більш ніж на шість одиниць, але цього було достатньо, щоб він був помічений в наземний телескоп, став таким чином, першим супутником астероїда, знайдений за допомогою наземних оптичних спостережень (Рис. 3.2). Супутник отримав тимчасове позначення S/1998 (45) 1. Далі супутник отримав назву "Petit-Prince" [32].

Другий (внутрішній) супутник був знайдений 14 лютого 2004 року F. Marchis, M. Baek, P. Descamps, J. Berthier, D. Hestroffer і F. Vachier після аналізу трьох зображень, отриманих в Very Large Telescope, ESO, Cerro Paranal, Chile [47]. Тимчасове позначення: S/2004 (45) 1. Пропонована назва "Princesse".

Астероїдна система (45) Eugenia, досить детально була розглянута Marchis et al. [48], де ними було прийнято, що центральний астероїд системи не симетричний і $J_2 = -C_{20} = 0.06$, у зв'язку з чим, площина руху супутників з часом не змінюється.

Астероїдна система **(87) Sylvia** (Рис 3.3), – потрійна система з Головного поясу.

Астероїд (87) Sylvia був відкритий 16 травня 1866 року N.R. Pogson в Madras, India. Альтернативне позначення: A909 GA.

Перший (зовнішній) супутник був відкритий 18 лютого 2001 року M.E. Brown і J.L. Margot за допомогою адаптивної оптики телескопа спостереження з W.M. Keck II Telescope, Mauna Kea, Hawaii, USA [15]. Тимчасове позначення: S/2001 (87) 1. Постійне позначення "Romulus", отримав 11 серпня 2005 року [46].

В статті 2012 року [25], автори використали, ту ж модель, що й для астероїдної системи (136617) 1994 CC і так само доповнили модель стисненням центрального тіла ($J_2 = -C_{20} = 0.0985 - 1.0$). Також вони промоделиували рух супутників на проміжку часу 50 років.

Berthier зі співавторами в своїй роботі [8], висловив припущення, що форма центрального астероїда системи істотно змінюється через приливні збурення з боку супутників і доповнив модель стисненням центрального тіла рівним $J_2 = -C_{20} = 0.024^{+0.016}_{-0.009}$.

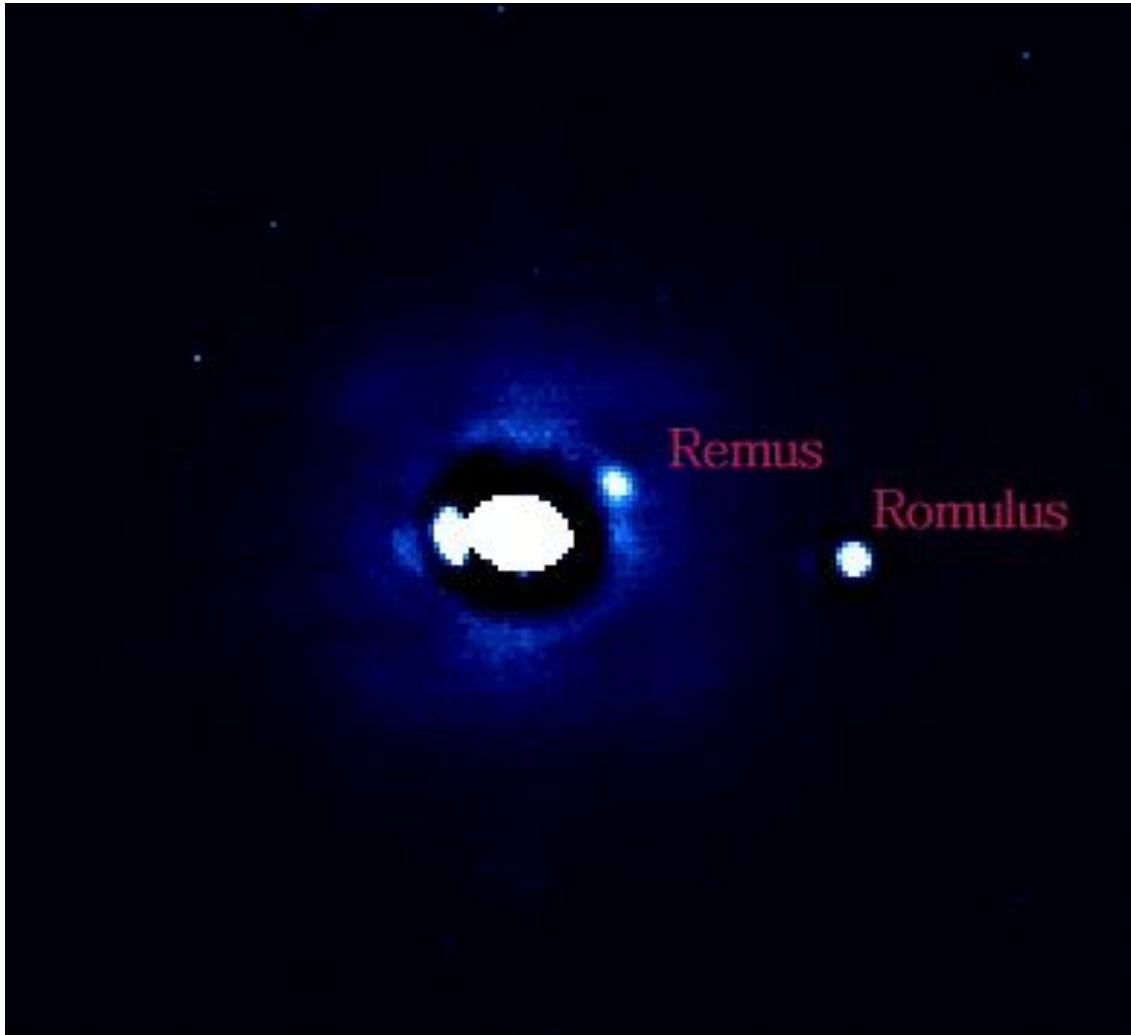


Рис. 3.3. Зображення астероїда (87) Sylvia з двома супутниками, отримане за допомогою адаптивної оптики VLT [99]

Астероїдна система **(90) Antiope** (Рис 3.4), подвійний астероїд Головного поясу. Астероїд (90) Antiope відкрито 1 жовтня 1899 року R. Luther в Düsseldorf, Germany. Альтернативне позначення: 1952 BK2.

Супутник відкрито 10 серпня 2000 року W.J. Merline, L.M. Close, J.C. Shelton, C. Dumas, F. Menard, C.R. Chapman і D.C. Slater на W.M. Keck II Telescope, Mauna Kea, Hawaii, USA [32]. Тимчасове позначення: S / 2000 (90) 1.

Астероїди з супутниками відкривали й раніше, але це був перший відомий випадок, коли обидва компоненти схожі за розмірами.

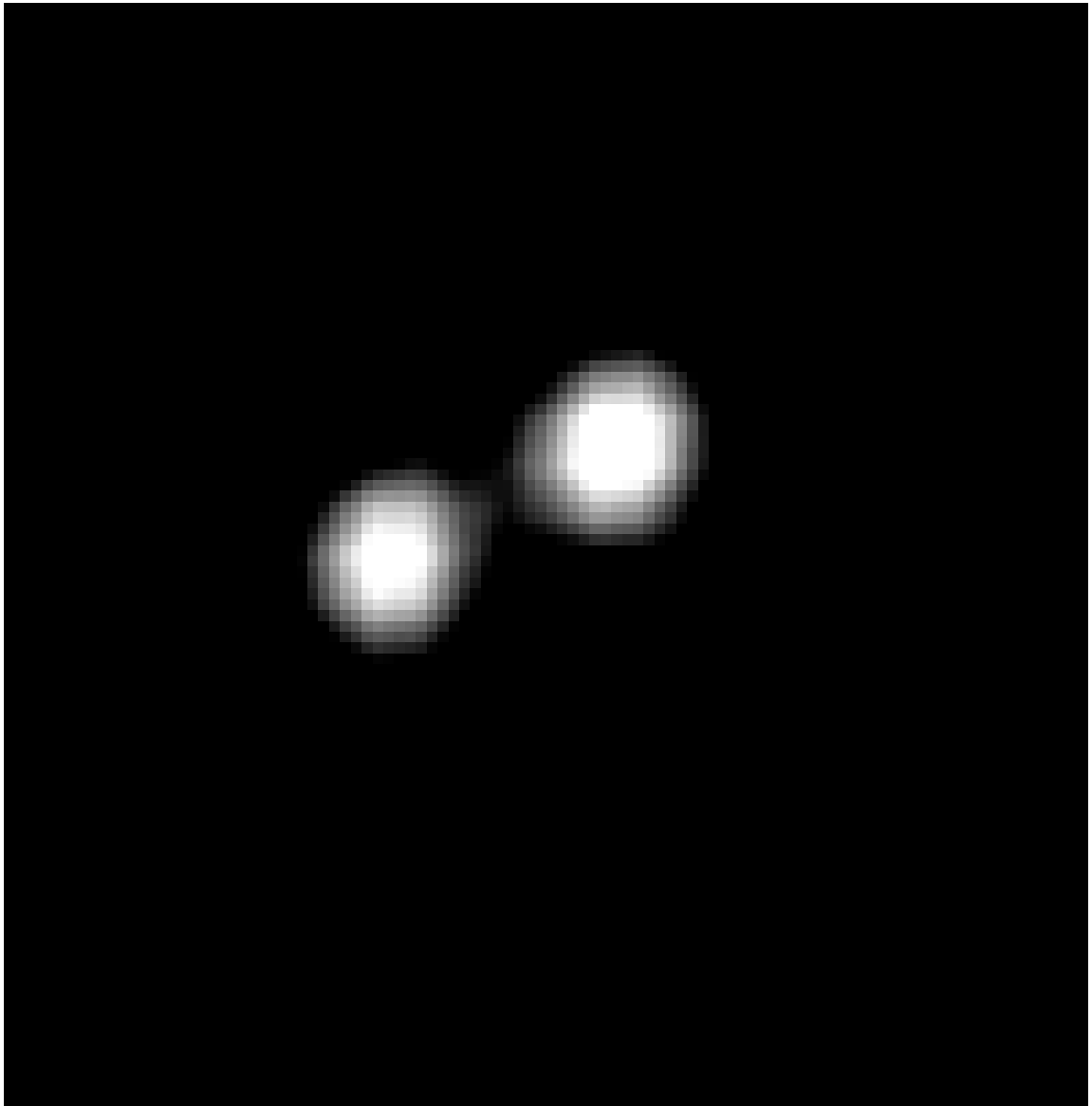


Рис. 3.4. Зображення подвійного астероїда (90) Antiope, отримане на W.M. Keck II [101]

Астероїдна система **(66391) 1999 KW4** (Рис 3.5), подвійний астероїд, належить групі Атенів з А33. Орбіта перетинає орбіту Меркурія і Венери.

Астероїд (66391) 1999 KW4 відкрито 20 травня 1999 року LINEAR, Socorro, New Mexico, USA.

Супутник відкритий 21 травня 2001 року з використанням радіолокаційних спостережень і фотометричних кривих блиску.

Завдяки радіолокаційним спостереженням, дуже добре вивчена подвійна система. Система використовувалась, як один з об'єктів для пошуку Binary YORP ефекту (збільшення великої піввісі орбіти супутника астероїда). При чисельному моделюванні різними авторами, компоненти приймалися за еліпсоїди [29], [71].



Рис. 3.5. Зображення подвійного астероїда (66391) 1999 KW4, отримане за допомогою радарних спостережень на GDSCC [100]

Шестикомпонентна система **(134340) Pluto**.

Pluto (Рис. 3.6) відкрито 23 січня 1930 року С.В. Tombaugh в Lowell Observatory, Flagstaff, Arizona, USA. Відкриття об'єкту мотивоване пошуком "Planet X" по гравітаційним збуренням орбітального руху Нептуна. З відкриттям транснептунових об'єктів, починаючи з 1992 року, Pluto вважався одним з найбільших членів класу ТНО. Його було класифіковано як планету з моменту його відкриття і до 2006 року. В 2006 році Міжнародний Астрономічний союз [90] класифікував Pluto як карликову планету і він отримав номер 134340 по каталогу MPC [91].



Рис. 3.6. Зображення Pluto отримане 13 липня 2015 року космічним апаратом New Horizons на відстані 768000 км [102]

Charon (Рис. 3.7) відкрито 22 червня 1978 року J.W. Christy за спостереженнями IMG з 29 квітня 1965 по 12 травня 1978 року U.S. Naval Observatory, USA [67]. Тимчасове позначення S/1978 P1. Постійну назву "Charon" отримав 3 січня 1986 року [49]. Серед супутників планет та карликових планет Charon є найбільшим по співвідношенню супутник – планета.

Nix і Hydra (Рис. 3.8-9) відкрили 15 травня 2005 року H.A. Weaver, S.A. Stern, M.J. Mutchler, A.J. Steffl, M.W. Buie, W.J. Merline, J.R. Spencer, E.F. Young і L.A. Young за допомогою спостережень на космічному телескопі Hubble Space

Telescope [G05c]. Тимчасове позначення: S/2005 P2 і S/2005 P1 відповідно. Постійні позначення супутники отримали 21 червня 2006 року [34].



Рис. 3.7. Зображення Charon отримане 13 липня 2015 року космічним апаратом New Horizons на відстані 466000 км. На зображенні півсфера обернена до Pluto з північним полюсом (затемнений) в верхній частині [102]

Kerberos (Рис. 3.10) відкрили 28 червня 2011 року M.R. Showalter, D.P. Hamilton, S.A. Stern, H.A. Weaver, A.J. Steffl і L.A. Young за допомогою спостережень на космічному телескопі Hubble Space Telescope [64]. Також були

спостереження до відкриття з 2006 року [14]. Тимчасове позначення: S/2011 (134340) 1. Постійне позначення "Kerberos" отримав 2 липня 2013 року [36].



Рис. 3.8. Зображення Nix отримане 14 липня 2015 року космічним апаратом New Horizons на відстані 165000 км [102]

Styx (Рис. 3.11) відкрили 26 червня 2012 року M.R. Showalter, H.A. Weaver, S.A. Stern, A.J. Steffl, M.W. Buie, W.J. Merline, M.J. Mutchler, R. Soummer і H. B. Throop за допомогою спостережень на космічному телескопі Hubble Space Telescope [65]. Тимчасова позначення: S/2012 (134340) 1. Постійну назву "Styx" отримав 2 червня 2013 року [36].

Взаємні затемнення и покриття Pluto і Charon відбувалися з 1985 по 1990 роки, що дозволило уточнити різні фізичні дані системи. В 1988 році було

підтверджено, що Pluto має тонку атмосферу, яка складається з азоту, метану, окису вуглецю.

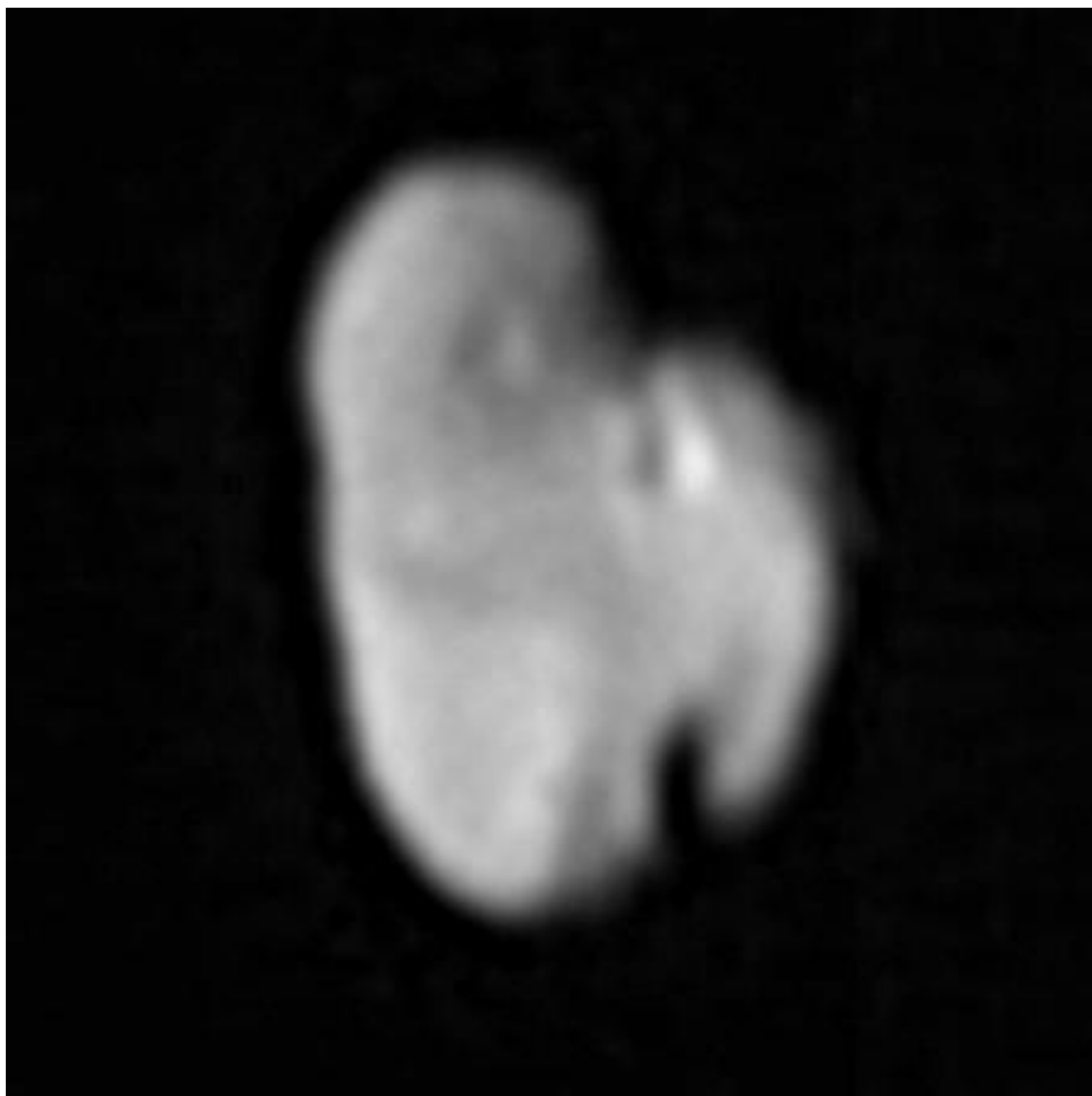


Рис. 3.9. Зображення Ніх отримане 14 липня 2015 року космічним апаратом New Horizons на відстані 231000 км [102]

Зонд New Horizons наблизився на мінімальну відстань до Pluto 14 липня 2015 року 11:50 UTC, пройшовши на відстані 12500 км від Pluto і 29000 км від Charon (Рис. 3.6-3.11).

На теперішній час, на підставі цих і попередніх космічних і наземних спостережень, різними авторами, були уточнені Кеплерові елементи орбіти

супутників Pluto [17], [66] та фізичні параметри компонентів системи [69], [30], [70], [14].



Рис. 3.10. Зображення Styx отримане 14 липня 2015 року космічним апаратом New Horizons на відстані 631000 км [102]

На підставі нових даних, Yu Jiang et al. [86] чисельно промодельювали еволюцію орбіт супутників Pluto на проміжку часу 800 діб, інтегруючи рівняння руху методом Рунге-Куты 8 порядку.

Астероїдна система **(136617) 1994 CC** (Рис. 3.12), належить групі Apollo з А33.

Астероїд 1994 CC відкрито 3 лютого 1994 року Spacewatch в Kitt Peak Observatory, Arizona, USA.

Супутники "Beta" і "Gamma" були відкриті 12 червня 2009 року M. Brozovic, L.A. M. Benner, M.C. Nolan, E.S. Howell, C. Magri, J.D. Giorgini, P.A. Taylor, J.L. Margot, M.W. Busch, M.K. Shepard, L.M. Carter, J.S. Jao, J. Van Brimmer, C.R. Franck, M.A. Silva, M.A. Kodis, D.T. Kelley, M.A. Slade, A. Bramson, K.J. Lawrence, J.T. Pollock, P. Pravec, D.E. Reichart, K.M. Ivarsen, J. Haislip, M.C. Nysewander і

А.Р. LaCluyze з використанням радіолокаційних спостережень з Goldstone, California, USA; Arecibo Observatory, Puerto Rico [12].



Рис. 3.11. Зображення Stux отримане 14 липня 2015 року космічним апаратом New Horizons на відстані 396100 км. Помітна подвійна форма супутника [102]

Великий ексцентриситет, більш ніж 0.4, призводить до того, що орбіта (136617) 1994 CC перетинає орбіти Землі і Марса. В 2011 році вийшла стаття [23], в якій автори розглядали модель руху супутників з урахуванням стиснення центрального астероїда ($J_2 = -C_{20} = 0.014 \pm 0.383$), на проміжку часу 300 діб.

В роботі 2016 року [86], на основі нових даних, автори чисельно промоделиували еволюцію орбіт супутників астероїдних систем (136617) 1994 CC и (87) Sylvia на проміжку часу 800 діб. Інтегрування рівнянь руху велося методом Рунге-Куты 8 порядку. В моделі враховувався гравітаційний потенціал несферичного центрального тіла, електростатичний потенціал і магнітний потенціал.

Система **(136108) Haumea** (Рис. 3.13) класифікована як плутоїд (підмножина карликових планет), ТНО і карликова планета.

Haumea відкрито 7 березня 2003 року в Sierra Nevada Observatory, Granada, Spain. Альтернативна назва: 2003 EL61. Свою назву об'єкт отримав 17 вересня 2008 року [MPC63878].

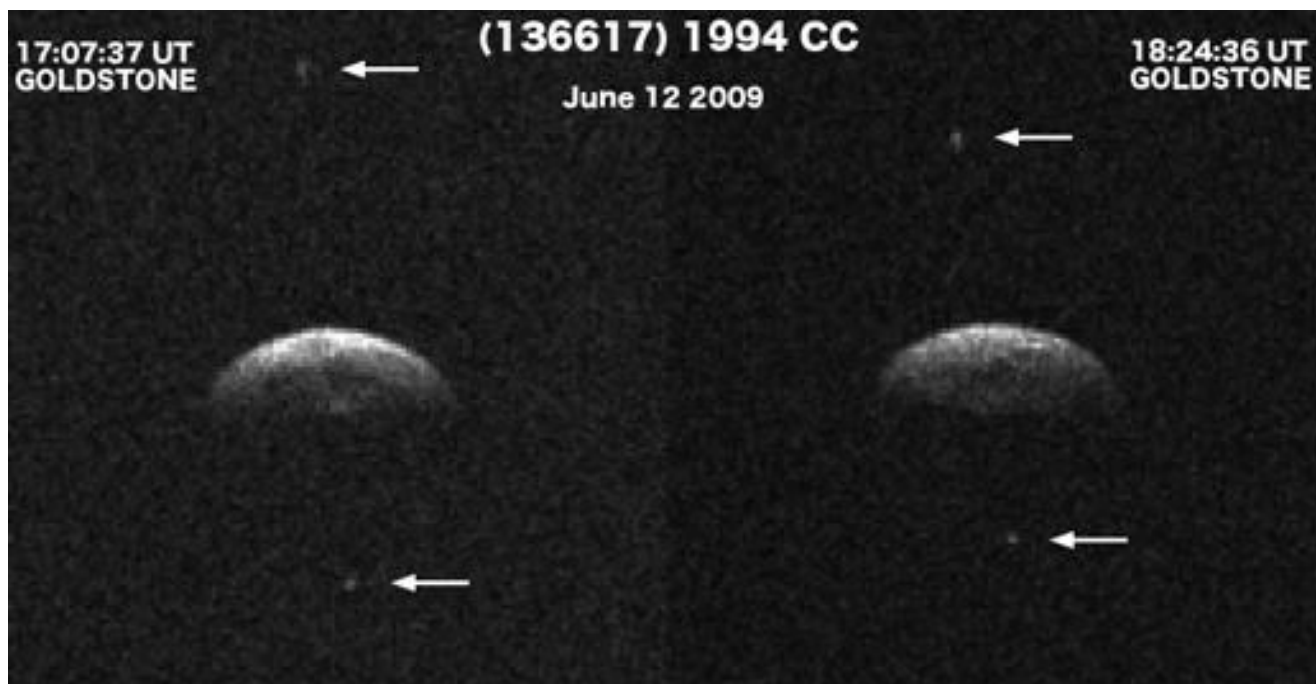


Рис. 3.12. Радіолокаційні спостереження астероїдної системи (136617) 1994 CC з Goldstone [100]

Перший супутник в системі Haumea - Ні'іака відкрито 26 січня 2005 року М. Е. Brown та іншими на телескопі W.M. Keck II, Mauna Kea, Hawaii, USA [33]. Тимчасове позначення: S/2005 (2003 EL61) 1. Постійне ім'я присвоєно 17 вересня 2008 року [35].

Другий супутник – Намака відкрито 30 червня 2005 року М. Е. Brown та іншими на телескопі W.M. Keck II, Mauna Kea, Hawaii, USA [16]. Тимчасове позначення: S/2005 (2003 EL61) 1. Постійне ім'я присвоєно 17 вересня 2008 року [35].

Обидва супутники примітні тим, що рухаються по ретроградним орбітам, навколо центрального тіла. Ragozzine і Brown [61] досить докладно розглянули систему (136108) Haumea використовуючи спостереження Hubble Space Telescope і W. M. Keck Telescope. Розрахували стиснення центрального тіла ($J_2 = -C_{20} = 0.244$) та проінтегрували рівняння руху системи на інтервалі 1300 діб.

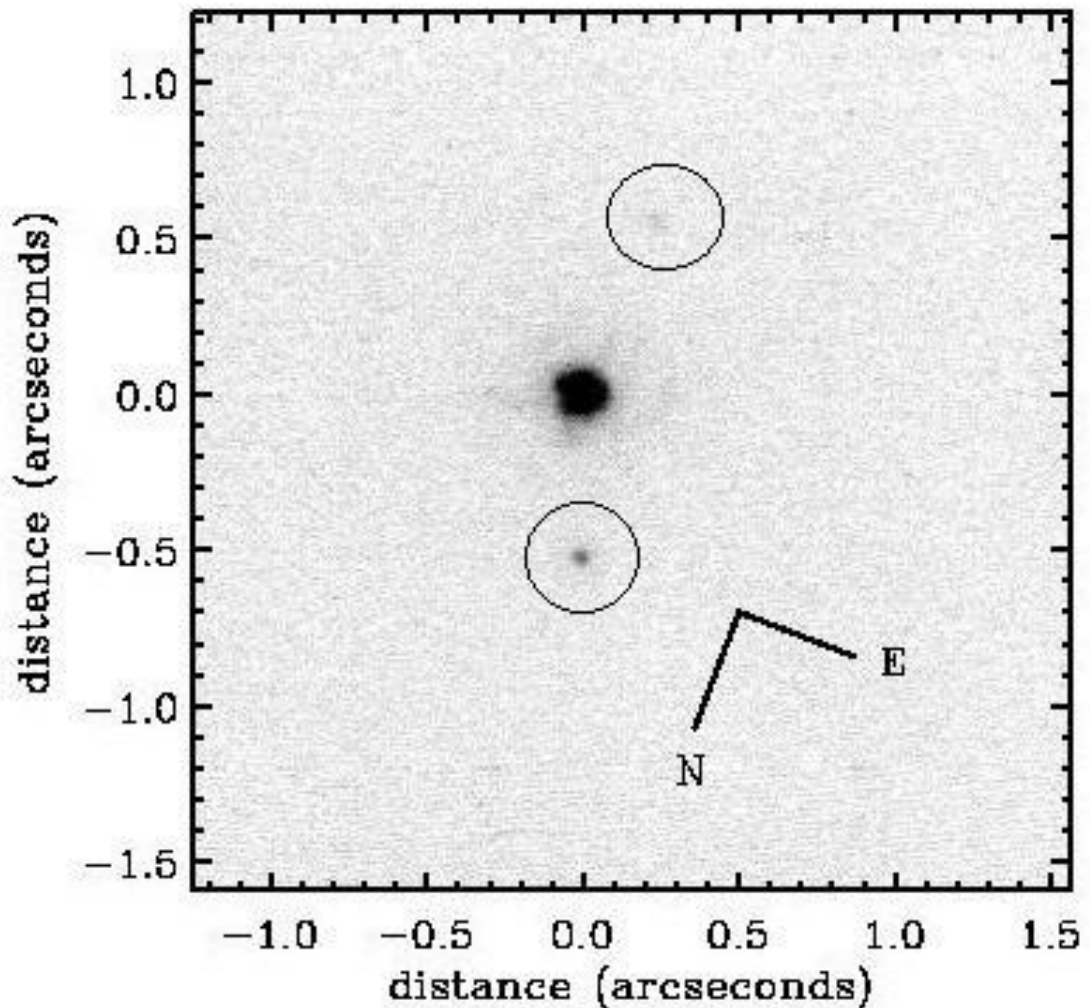


Рис. 3.13. Haumea з двома супутниками Hi'iaka (зверху) і Namaka (знизу).

Зображення отримане на W.M. Keck II [101]

Астероїдна система **(153591) 2001 SN263**, потрійна система з групи Amor A33.

Астероїд 2001 SN263 відкрито 20 вересня 2001 року LINEAR в Socorro, New Mexico, USA.

Супутники "Beta" і "Gamma" відкрито М.С. Nolan, E.S. Howell, L.A.M. Benner, S.J. Ostro, J.D. Giorgini, M.W. Busch, L.M. Carter, R.F. Anderson, C. Magri, D.B. Campbell, J.L. Margot і R. Vervack з використанням радіолокаційних спостережень Arecibo Observatory, Puerto Rico [56].

Система **(385446) Manwe**, подвійна система з групи ТНО.

Об'єкт відкрито 25 серпня 2003 року М. W. Buie в Cerro Tololo Observatory, La Serena, Chile. Альтернативна назва: 2003 QW111.

Супутник відкрито 25 липня 2006 року К.S. Noll, W.M. Grundy, D.C. Stephens і Н.F. Levison за допомогою Hubble Space Telescope [56]. Ім'я "Thorondor", супутник отримав 15 квітня 2014 року [MPC88005].

Динаміка супутників всіх **дев'яти** вищеперерахованих систем розглянута автором на проміжку 100 років і 1000 років з урахуванням несферичності компонентів (розкладення гравітаційного потенціалу компонентів, приливних горбів), тиску світла (тіньова функція), великих планет Сонячної системи, для виявлення періодичних і вікових збурень в Кеплерових елементах орбіт.

В Таблиці 3.3 показані Кеплерові елементи орбіти обраних систем малих тіл для врахування їхнього руху по геліоцентричній орбіті [96]. В наступній Таблиці 3.4, зібрані данні по фізичним параметрам систем. Вони потрібні для розрахунків коефіцієнтів розкладання гравітаційного потенціалу компонентів розглянутих об'єктів (Таблиця 3.5).

Таблиця 3.3.

**Кеплерові елементи орбіти обраних подвійних і кратних
малих тіл Сонячної системи**

Назва	a , а.о.	e	i , °	ω , °	Ω , °	M_0 , °	Epoch
(45) Eugenia	2.720342369	0.083185113	6.6033570	88.689234	147.681770	2.460259	2014 May 23
(87) Sylvia	3.481808398	0.091145156	10.8768036	263.685494	73.083782	179.424861	2014 May 23
(90) Antiope	3.154487052	0.163458400	2.2071403	244.40561	70.04471	188.255621	2014 May 23
(66391) 1999 KW4	0.642291859	0.688460238	38.8871737	192.6154467	244.9231238	221.227725	2014 May 23
(134340) Pluto	39.44506973	0.250248713	17.08900092	112.5971417	110.376958	25.24718971	2006 Sep 22
(136617) 1994 CC	1.637780212	0.417226647	4.6842339	24.7567739	268.603487	116.8774809	2014 May 23

(136108) Haumea	43.1660	0.192457	28.191350	240.4148	121.78801	208.1445	2014 May 23
(153591) 2001 SN263	1.986951527	0.478406719	6.6857566	172.8285743	325.8353797	86.287743	2014 May 23
(385446) Manwe	43.635	0.11541	2.666383	21.058	68.520	273.396	2014 May 23

На даний час стандартом чисельного інтегрування в небесній механіці є *метод Еверхарта* [22]. Метод Еверхарта 15-го порядку [5] був застосований автором для чисельного інтегрування рівнянь руху.

Метод Еверхарта є одним з найефективніших по точності і швидкодії чисельним методом для вирішення завдань небесної механіки. Розглянемо основну ідею побудови алгоритмів Еверхарта на прикладі рішення диференціальних рівнянь виду:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, t). \quad (3.11)$$

Уявімо праву частину (3.11) у вигляді ряду за степенями t в околиці $t_1=0$:

$$\ddot{x} = F(x, t) = F_1 + A_1t + A_2t^2 + \dots + A_nt^n. \quad (3.12)$$

Інтегруючи рівняння (3.12) двічі, отримаємо:

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + F_1t + \frac{A_1t^2}{2} + \frac{A_2t^3}{3} + \dots + \frac{A_nt^{n+1}}{n+1}, \quad (3.13)$$

$$x = x_1 + \dot{x}_1t + \frac{F_1t^2}{2} + \frac{A_1t^3}{6} + \dots + \frac{A_nt^{n+2}}{(n+1)(n+2)}. \quad (3.14)$$

Важливо відзначити, що поліном, що стоїть в правій частині (3.12) не є відрізком ряду Тейлора. Коефіцієнти A_i обчислюються з умов найкращого наближення x і \dot{x} в момент часу T , відповідно значенню рішення на кінці кроку h по формулам (3.13) і (3.14). Для зв'язку A – значень з F – значеннями використовується вираз:

$$F = F_1 + \alpha_1t + \alpha_2t(t-t_2) + \alpha_3t(t-t_2)(t-t_3) + \dots \quad (3.15)$$

В кожний момент часу t_i маємо:

$$\begin{cases} F_2 = F_1 + \alpha_1 t_2, \\ F_3 = F_1 + \alpha_1 t_3 + \alpha_2 t_3 (t_3 - t_2), \\ \dots \end{cases}$$

Позначаючи $t_{nj} = t_n - t_j$, отримаємо:

$$\begin{cases} \alpha_1 = (F_2 - F_1) / t_2, \\ \alpha_2 = ((F_3 - F_1) / t_3 - \alpha_1) / t_{32}, \\ \alpha_3 = (((F_4 - F_1) / t_4 - \alpha_1) / t_{42} - \alpha_2) / t_{32}, \\ \alpha_4 = (((((F_5 - F_1) / t_5 - \alpha_1) / t_{52} - \alpha_2) / t_{53} - \alpha_3) / t_{54}, \\ \dots \end{cases} \quad (3.16)$$

Зв'язок A – значень з α – значеннями знаходиться з наступних співвідношень:

$$\begin{cases} A_1 = \alpha_1 + (-t_2 t_3) \alpha_2 + (t_2 t_3) \alpha_3 = c_{11} \alpha_1 + c_{21} \alpha_1 \alpha_2 + c_{31} \alpha_3 + \dots, \\ A_2 = \alpha_2 + (-t_2 - t_3) \alpha_3 + \dots = c_{22} \alpha_2 + c_{32} \alpha_3 + \dots, \\ A_3 = \alpha_3 + \dots = c_{33} \alpha_3 + \dots, \\ \dots \end{cases} \quad (3.17)$$

Коефіцієнти c_{ij} визначаються з рекурентних співвідношень:

$$\begin{cases} c_{ij} = 1, & i = j, \\ c_{ij} = -t_i c_{i-1,1} & i > 1, \\ c_{ij} = c_{i-1,j-1} - t_i c_{i-1,j}, & 1 < j < i. \end{cases} \quad (3.18)$$

Надалі знаходження рішення рівняння (3.11) зводиться до знаходження вузлів розбиття t_i кроку h . Покажемо знаходження вузлів розбиття кроку $h = [0, T]$ на прикладі алгоритму інтегрування п'ятого порядку ($n = 5$). У початковий момент часу $t_1=0$ нам відомі x_1, \dot{x}_1, F_1 . Значення x в момент часу t_2, t_3 і t_4 обчислюються за формулами:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \dot{x}_1 t_2 + F_1 t_2^2 / 2 + [A_1 t_2^3 / 2 \times 3 + A_2 t_2^4 / 3 \times 4 + A_3 t_2^5 / 4 \times 5], \\ x_3 = x_1 + \dot{x}_1 t_3 + F_1 t_3^2 / 2 + A_1 t_3^3 / 2 \times 3 + [A_2 t_3^4 / 3 \times 4 + A_3 t_3^5 / 4 \times 5], \\ x_4 = x_1 + \dot{x}_1 t_4 + F_1 t_4^2 / 2 + A_1 t_4^3 / 2 \times 3 + A_2 t_4^4 / 3 \times 4 + [A_3 t_4^5 / 4 \times 5]. \end{cases} \quad (3.19)$$

Вираз (3.19) є пророкуючими рівняннями для визначення коефіцієнтів A_i . За допомогою наступних двох виправляючих рівнянь знаходяться значення розв'язку на кінці кроку h :

$$\begin{cases} x(T) = x_1 + \dot{x}_1 T + F_1 T^2 / 2 + A_1 T^3 / 2 \times 3 + A_2 T^4 / 3 \times 4 + A_3 T^5 / 4 \times 5, \\ \dot{x}(T) = \dot{x}_1 + F_1 T + A_1 T^2 / 2 + A_2 T^3 / 3 + A_3 T^4 / 4. \end{cases} \quad (3.20)$$

Значення t_2, t_3, t_4 визначаються з умов, які дозволили б за допомогою формул (3.20) отримати рішення з точністю до сьомого порядку, тобто різниці рішень п'ятого і сьомого порядків повинні обернутися в нуль:

$$\begin{cases} \Delta x = 0, \\ \Delta \dot{x} = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Вводячи безрозмірні величини $h_i = \frac{t_i}{T}$, можна отримати систему алгебраїчних рівнянь для відповідних їм коефіцієнтів, виду:

$$\begin{cases} \frac{c'_{41}}{2} + \frac{c'_{42}}{3} + \frac{c'_{43}}{4} + \frac{1}{5} = 0, \\ \frac{c'_{41}}{3} + \frac{c'_{42}}{4} + \frac{c'_{43}}{5} + \frac{1}{6} = 0, \\ \frac{c'_{41}}{4} + \frac{c'_{42}}{5} + \frac{c'_{43}}{6} + \frac{1}{7} = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Розв'язок цієї системи:

$$\begin{cases} c'_{41} = -\frac{4}{35} = -h_2 h_3 h_4, \\ c'_{42} = \frac{6}{7} = h_2 h_3 + h_3 h_4 + h_2 h_4, \\ c'_{43} = -\frac{12}{7} = -h_2 - h_3 - h_4. \end{cases} \quad (3.23)$$

показує, що значення h_2, h_3, h_4 виявляються коренями наступного полінома третього ступеню:

$$h^3 + \left(-\frac{12}{7}\right)h^2 + \left(\frac{6}{7}\right)h - \frac{4}{35} = 0. \quad (3.24)$$

З (3.24) випливає, що отримані вузли розбиття кроку h збігаються з квадратурною формулою Гаусса-Радона, а величини h_2 , h_3 , h_4 дорівнюють кореням полінома Лежандра $P_3(2h - 1) = 0$.

Метод Еверхарта є неявним однокроковим методом.

Для врахування збурень з боку великих планет автор запозичив необхідні координати з *чисельної теорії DE431(DE430)* [27].

Ефемериди великих планет і Місяця DE430 і DE431 генеруються шляхом порівняння чисельно інтегрованих орбіт Місяця і великих планет зі спостереженнями. Сучасна місячна орбіта відома з субметровою точністю за допомогою лазерної локації Місяця. Орбіти внутрішніх планет, відомо з субкілометровою точністю за рахунок порівняння спостереження радіокосмічних апаратів на орбіті навколо них. Дуже довгі виміри інтерферометрами космічних апаратів на Марсі дозволяють прив'язати ефемериди до Celestial Reference Frame з точністю $0''.0002$. Це є обмежуючим джерелом помилок для орбіт планет земної групи, і відповідає орбіті невизначеності в кілька сотень метрів. Орбіти Юпітера і Сатурна визначаються з точністю в кілька десятків кілометрів в результаті даних відстеження космічних апаратів. Орбіти Урана, Нептуна і Плутона в першу чергу визначаються з астрометричних спостережень, для яких вимірювання мають більшу похибку через атмосферу Землі, в поєднанні з каталогом зірок, обмежують точність до декількох тисяч кілометрів. DE430 і DE431 розрізняються за своїм інтегрованим проміжком часу. В динамічну модель DE430 включено демпфуючий член між рідкою серцевиною Місяця і твердою мантією, яка дає найкращу відповідність даним місячної лазерної локації, проте не підходить для вертикальної інтеграції більш ніж кілька століть. Ефемериди DE431 схожі на DE430, але отримані без демпфуючого члена, тому місячна орбіта є менш точною, ніж в DE430 протягом часу поблизу поточної епохи, але більше підходить, ніж за кілька століть в минулому. DE431 є придатною на більш тривалому проміжку часу (від -13200 до +17191 років), ніж DE430, яка охоплює проміжок від 1550 до 2650 року.

На відмінність від восьми систем малих тіл, для яких наводяться Кеплерові елементи орбіти (Таблиця 3.6), в системі Pluto, наведені відомі положення і швидкості шести компонентів відносно барицентру системи (Таблиця 3.7).

Тому необхідно зробити перехід від координат та компонент швидкості в барицентричній системі координат до Кеплерових елементів орбіт. Такий перехід має певні особливості в порівнянні зі звичним переходом від вектора положення і швидкості в планетоцентричній системі координат до Кеплерових елементів орбіти [19].

В замкненій барицентричній системі координат маємо:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0, \quad \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}, \quad (3.25)$$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \\ \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}, \end{cases} \quad (3.26)$$

де m_1 – маса першого тіла, m_2 – маса другого тіла, r_1 – відстань першого тіла до барицентру, r_2 – відстань другого тіла до барицентру.

$$\theta_1 = \theta_2 - \pi = \theta, \quad \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}, \quad (3.27)$$

$$\begin{cases} x_1 = r_1 \cos \theta_1, & x_2 = r_2 \cos \theta_2, \\ y_1 = r_1 \sin \theta_1, & y_2 = r_2 \sin \theta_2, \end{cases} \quad (3.28)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{r}_1 \cos \theta_1 - r_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1, & \dot{x}_2 = \dot{r}_2 \cos \theta_2 - r_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2, \\ \dot{y}_1 = \dot{r}_1 \sin \theta_1 + r_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1, & \dot{y}_2 = \dot{r}_2 \sin \theta_2 + r_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2. \end{cases} \quad (3.29)$$

В результаті:

$$|\dot{\vec{r}}_1|^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = \dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\theta}_1^2. \quad (3.30)$$

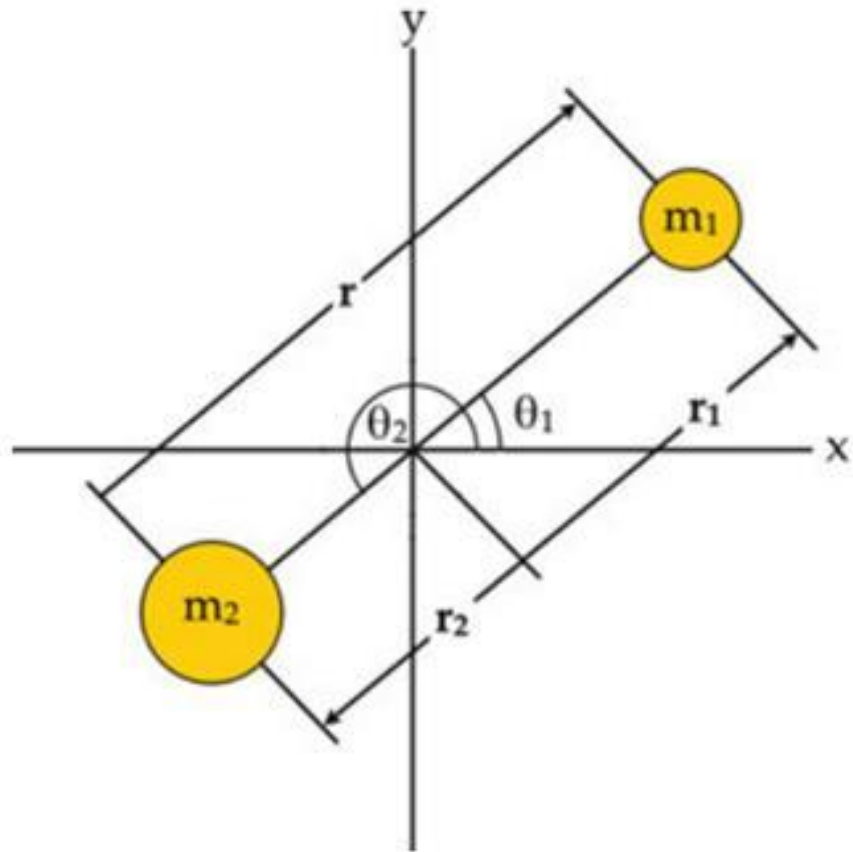


Рис. 3.14. Рух тіл в барицентричній системі координат.

Інтеграл енергії:

$$\frac{m_1 |\dot{r}_1|^2}{2} + \frac{m_2 |\dot{r}_2|^2}{2} - \frac{Gm_1m_2}{r} = c_{10}, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{m_1 |\dot{r}_1|^2}{2} + \frac{m_2 |\dot{r}_2|^2}{2} - \frac{Gm_1m_2}{r} &= \frac{1}{2} \left(m_1 \left(\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\theta}_1^2 \right) + m_2 \left(\dot{r}_2^2 + r_2^2 \dot{\theta}_2^2 \right) \right) - \frac{Gm_1m_2}{r} = \\ &= \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)^2} m_1+m_2 \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - \frac{Gm_1m_2}{r} = \frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - \frac{Gm_1m_2}{r}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Отже:

$$\frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - \frac{Gm_1m_2}{r} = c_{10} \quad (3.33)$$

Момент імпульсу по визначенню: $h_1 = m_1 r_1^2 \dot{\theta}_1$, $h_2 = m_2 r_2^2 \dot{\theta}_2$,

$$\begin{aligned}
h &= h_1 + h_2 = m_1 r_1^2 \dot{\theta} + m_2 r_2^2 \dot{\theta} = m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} r^2 \dot{\theta} + m_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} r^2 \dot{\theta} = \\
&= \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (m_2 + m_1) r^2 \dot{\theta} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \dot{\theta}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Сумарний момент імпульсу:

$$h = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \dot{\theta} \tag{3.35}$$

Порівнюючи з інтегралом енергії:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{G m_1 m_2}{r} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} h^2 \frac{1}{r^2} - \frac{G m_1 m_2}{r} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{r^2} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} - \frac{G m_1 m_2}{r} = c_{10}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Диференціальні рівняння руху m_2 відносно m_1 :

$$\ddot{\vec{r}} = - \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r} \tag{3.37}$$

З законів Ньютона випливає:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = - \frac{G m_2}{r^3} \vec{r} = - \frac{G m_2 m_2^3}{(m_1 + m_2)^3 r_1^3} \frac{m_1 + m_2}{m_2} \vec{r}_1 = - \frac{G m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}, \\ \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{G m_1}{r^3} \vec{r} = - \frac{G m_1 m_1^3}{(m_1 + m_2)^3 r_2^3} \frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{r}_2 = - \frac{G m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\vec{r}_2}{r_2^3}. \end{cases} \tag{3.38}$$

Кеплерові елементи орбіти точки 2 відносно барицентру системи тіл m_1 та m_2 обчислюються так:

$$\mu = G \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \tag{3.38}$$

Питомий момент імпульсу:

$$h_s = \sqrt{p \mu} \tag{3.39}$$

$$\begin{cases} h_{SX} = y_2 \dot{z}_2 - z_2 \dot{y}_2, \\ h_{SY} = x_2 \dot{z}_2 - z_2 \dot{x}_2, \\ h_{SZ} = x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2. \end{cases} \quad (3.40)$$

Фокальний параметр:

$$p = \frac{h_{SX}^2 + h_{SY}^2 + h_{SZ}^2}{\mu}, \quad (3.41)$$

$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}, \quad \left| \vec{r}_2 \right| = \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2}. \quad (3.42)$$

Велика піввісь:

$$a = \frac{r_2 \mu}{2\mu - \left| \vec{r}_2 \right|^2 r_2}. \quad (3.43)$$

Ексцентриситет та істинна аномалія:

$$\begin{cases} e \cos \mathbf{V} = \frac{p}{r_2} - 1, \\ e \sin \mathbf{V} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{x_2 \dot{x}_2 + y_2 \dot{y}_2 + z_2 \dot{z}_2}{r_2}. \end{cases} \quad (3.44)$$

Нахил:

$$\cos i = \frac{h_{SZ}}{\sqrt{p \mu}}. \quad (3.45)$$

Довгота висхідного вузла:

$$\begin{cases} \sin \Omega = \frac{h_{SX}}{\sqrt{\mu p} \sin i}, \\ \cos \Omega = \frac{h_{SY}}{\sqrt{\mu p} \sin i}. \end{cases} \quad (3.46)$$

В Додатку С на Рис. С.1 – Рис. С.18 наведені графіки змін Кеплерових елементів орбіти (велика піввісь, ексцентриситет, нахил, аргумент перицентру і довгота висхідного вузла) для обраних дев'яти систем малих тіл Сонячної системи. У всіх Кеплерових елементах орбіт всіх розглянутих систем виявлені періодичні зміни. За допомогою програмного пакета MCV [4] визначені основні періоди змін Кеплерових елементів орбіт (Таблиця 3.8) для дев'яти обраних систем. І для: (136617) 1994 CC – **АЗЗ**; (87) Sylvia – **Головний пояс**; (136108) Naumea – **ТНО**; з трьох найчисельніших груп малих тіл в Сонячній системі в таблиці Таблиця 3.9 наведені співвідношення з різними періодами, що ймовірно є чинниками цих збурень.

Таблиця 3.4.

**Фізичні параметри обраних подвійних і кратних малих тіл
Сонячної системи та їх супутників**

Назва	Геометричне альbedo	Діаметр, км	Габаритні розміри, км	Маса, кг
(45) Eugenia	0.046 ± 0.006 [54]	206.14 ± 6.22 [54]	$200 \times 147 \times 105$ [44]	$(5.6300 \pm 0.0003) \times 10^{18}$ [6]
(45) Eugenia, <i>satellite Petit-Prince</i>	0.046 ± 0.006 [54]	7 ± 2 [48]	-	$(1.975 \pm 2.605/1.934) \times 10^{14}$ [48]
(45) Eugenia, <i>satellite Princesse</i>	0.046 ± 0.006 [54]	5 ± 1 [48]	-	$(7.199 \pm 6.372/3.848) \times 10^{13}$ [48]
(87) Sylvia	0.036 ± 0.008 [54]	286 ± 11 [45]	$384 \times 264 \times 232$ [45]	$(1.480 \pm 0.006) \times 10^{19}$ [6]
(87) Sylvia, <i>satellite Romulus</i>	0.036 ± 0.008 [54]	10.8 ± 5.6 [25]	-	$(7.915 \pm 22.109/7.105) \times 10^{14}$ [25]
(87) Sylvia, <i>satellite Remus</i>	0.036 ± 0.008 [54]	10.6 ± 1.6 [25]	-	$(7.483 \pm 4.877/3.285) \times 10^{14}$ [25]
(90) Antiope	0.062 ± 0.007 [54]	87.8 ± 1 [18]	$93.0 \times 87.0 \times 83.6$ [18]	$8.28 \times 10^{17} \pm 2.2 \times 10^{16}$ [18]
(90) Antiope, <i>satellite S/2000 (90) 1</i>	0.062 ± 0.007 [54]	83.8 ± 1.0 [18]	$89.4 \times 82.8 \times 79.6$ [18]	$3.86 \times 10^{17} \pm 1.54 \times 10^{16}$ [18]
(66391) 1999 KW4	0.23 [105]	1.317 ± 0.04 [58]	$1.532 \times 1.495 \times 1.347$ [58]	$(2.490 \pm 0.054) \times 10^{12}$ [58]
(66391) 1999 KW4, <i>satellite "Beta"</i>	0.23 [105]	0.451 ± 0.027 [58]	$0.571 \times 0.463 \times 0.349$ [58]	$(9.462 \pm 3.176/2.558) \times 10^{10}$ [58]
(134340) Pluto	0.56 [43]	2374 ± 8 [69]	-	$(1.3030 \pm 0.0027) \times 10^{22}$ [105]
(134340) Pluto, <i>satellite Charon</i>	0.56 [43]	1212 ± 6 [69]	-	$(1.587 \pm 0.015) \times 10^{21}$ [105]
(134340) Pluto, <i>satellite Nix</i>	0.465 ± 0.035 [69]	43 [105]	$50 \times 35 \times 33$ [66]	$(4.5 \pm 4.0) \times 10^{16}$ [105]
(134340) Pluto, <i>satellite Hydra</i>	0.51 [69]	38 [105]	$65 \times 45 \times 25$ [66]	$(4.8 \pm 4.2) \times 10^{16}$ [105]
(134340) Pluto, <i>satellite Kerberos</i>	0.5 [105]	13 [105]	$19 \times 10 \times 9$ [66]	$(1.6 \pm 0.9) \times 10^{16}$ [105]
(134340) Pluto, <i>satellite Styx</i>	0.5 [105]	10 [105]	$16 \times 9 \times 8$ [66]	7.5×10^{15} [105]

(136108) Haumea	0.663 ± 0.063 [60]	1379 ± 57 [60]	$1960 \times 1518 \times 996$ [60]	$4.03 \times 10^{21} \pm 4 \times 10^{19}$ [61]
(136108) Haumea, <i>satellite Hi'iaka</i>	0.8 ± 0.07 [60]	320 [60]	-	$5.10 \times 10^{19} \pm 6.35 \times 10^{18}$ [61]
(136108) Haumea, <i>satellite Namak</i>	0.8 ± 0.2 [60]	160 [61]	-	$6.37 \times 10^{18} \pm 7.94 \times 10^{17}$ [61]
(136617) 1994 CC	0.42 ± 0.1 [13]	0.62 ± 0.06 [13]	$0.69 \times 0.67 \times 0.64$ [13]	$(2.660 \pm 0.329) \times 10^{11}$ [23]
(136617) 1994 CC, <i>satellite "Beta"</i>	0.42 ± 0.1 [13]	0.113 ± 0.03 [13]	-	$(1.587 \pm 0.620/0.541) \times 10^9$ [13]
(136617) 1994 CC, <i>satellite "Gamma"</i>	0.42 ± 0.1 [13]	0.08 ± 0.03 [13]	-	$(5.630 \pm 13.187/4.648) \times 10^8$ [13]
(153591) 2001 SN263	0.04 [55]	2.6 [24]	-	$(9.51 \pm 0.13) \times 10^{12}$ [23]
(153591) 2001 SN263, <i>satellite "Beta"</i>	0.04 [55]	1.06 [24]	-	$(5.301 \pm 0.935) \times 10^{11}$ [24]
(153591) 2001 SN263, <i>satellite "Gamma"</i>	0.04 [55]	0.46 [24]	-	$(4.332 \pm 0.765) \times 10^{10}$ [24]
(385446) Manwe	0.1 ± 0.04 [37]	$160 \pm 24/44$ [37]	-	$(1.940 \pm 0.036) \times 10^{18}$ [37]
(385446) Manwe, <i>satellite Thorondor</i>	0.1 ± 0.04 [37]	$92 \pm 14/26$ [37]	-	$(3.058 \pm 3.178/2.305) \times 10^{17}$ [37]

Програма "Multi-Column View" (MCV) призначена для перегляду і редагування багатоканальних часових рядів. Вона дозволяє отримати період або періоди коливань в часових рядах спостережень або чисельно отриманих результатах.

У супутників кожної системи деякі періоди коливань Кеплерових елементів орбіти збігаються, що може бути наслідком одного і того ж впливу, як наслідок, в астероїдних системах (136617) 1994 CC, (87) Sylvia супутники знаходяться в орбітальних резонансах [76], а в (136108) Haumea наближуються до нього.

Таблиця 3.5.

Розраховані коефіцієнти розкладання гравітаційного поля компонентів обраних систем малих тіл

Астероїдна система	C_{20}	C_{21}	C_{22}	S_{21}	S_{22}
(45) Eugenia	-0.01362 ± 0.00043	0.01085 ± 0.00035	0.00316 ± 0.00010	0.00798 ± 0.00025	0.00690 ± 0.00045
(87) Sylvia	-0.05319 ± 0.00024	0.06491 ± 0.00029	0.01888 ± 0.00008	0.04462 ± 0.00020	0.03077 ± 0.00265
(90) Antiope	-0.04946 ± 0.00048	0.25747 ± 0.00247	0.01192 ± 0.00011	0.24086 ± 0.00231	0.10718 ± 0.00548
(90) Antiope, <i>satellite S/2000 (90) 1</i>	-0.09854 ± 0.00238	0.48340 ± 0.01169	0.02573 ± 0.00062	0.44771 ± 0.01083	0.20113 ± 0.01345
(66391) 1999 KW4	-0.02795 ± 0.00067	0.09075 ± 0.00291	0.00164 ± 0.00004	0.08856 ± 0.00214	0.02556 ± 0.00406
(66391) 1999 KW4, <i>satellite "Beta"</i>	-0.05840 $\pm 0.01473/0.02112$	0.05881 $\pm 0.01484/0.02127$	0.01099 $\pm 0.00277/0.00397$	0.04769 $\pm 0.01203/0.01724$	0.01980 $\pm 0.00660/0.01090$
(134340) Pluto, <i>satellite Nix</i>	-0.03807 $\pm 0.01767/0.29995$	0.06091 $\pm 0.02827/0.47988$	0.01569 $\pm 0.00782/0.12361$	0.04264 $\pm 0.01979/0.33592$	0.01898 $\pm 0.00893/0.15183$

(134340) Pluto, <i>satellite Hydra</i>	-0.18704 ± 0.08606/1.28909	0.09118 ± 0.04195/0.62843	0.04115 ± 0.01893/0.28360	0.06313 ± 0.02904/0.43507	0.04822 ± 0.02250/0.33752
(134340) Pluto, <i>satellite Kerberos</i>	-0.00670 ± 0.00236/0.00841	0.00575 ± 0.00203/0.00722	0.00293 ± 0.00103/0.00367	0.00303 ± 0.00107/0.00380	0.00188 ± 0.00068/0.00241
(134340) Pluto, <i>satellite Styx</i>	-0.01138 ± 0.00015	0.01046 ± 0.00014	0.00477 ± 0.00006	0.00588 ± 0.00008	0.00346 ± 0.00001
(136108) Haumea	-0.79662 ± 0.03020	0.56049 ± 0.02125	0.14712 ± 0.00558	0.43409 ± 0.01646	0.14381 ± 0.01424
(136617) 1994 CC	-0.01339 ± 0.00019	0.08386 ± 0.00120	0.00172 ± 0.00002	0.08143 ± 0.00117	0.02090 ± 0.00834

В Таблиці 3.9 наведені співвідношення між величинами коливань Кеплерових елементів орбіт і орбітальними барицентричними періодами астероїдних систем (Таблиця 3.3), орбітальними періодами супутників астероїдів (Таблиці 3.6 та 3.7), орбітальними періодами найближчих великих планет: Землі – 365.256 діб, Марса – 686.980 діб, Юпітера – 4332.589 діб и Нептуна – 60189 діб [103].

Автором виявлено, що періоди коливань величин Кеплерових елементів орбіт, які відносяться з орбітальними барицентричними періодами астероїдних систем як невеликі цілі числа, є наслідком зближення з Сонцем при русі по еліптичним орбітам. Періоди коливань величин Кеплерових елементів орбіт, які відносяться з орбітальними періодами супутників астероїдів як невеликі цілі числа, виникають як наслідок зближення з центральним асиметричним астероїдом при русі по еліптичним орбітам. Періоди коливань величин Кеплерових елементів орбіт, які відносяться з орбітальним періодом найближчої з великих планет, виникають в результаті періодичних зближень з ними.

Таблиця 3.6.

Кеплерові елементи орбіт супутників систем малих тіл

Назва	a , К.М.	e	i , °	ω , °	Ω , °	M_0 , °	Epoch
(45) Eugenia, <i>satellite Petit-Prince</i>	1164.42 ± 0.03 [6]	0.002 ± 0.0012 [6]	8.0 ± 0.1 [45]	138 ± 9 [105]	201.93 ± 0.33 [6]	5 ± 9 [6]	2003 Dec 06.5
(45) Eugenia, <i>satellite Princesse</i>	610.59 ± 0.06 [6]	0.11 ± 0.02 [6]	-	95 ± 5 [105]	206.67 ± 1.72 [6]	-187 ± 5 [6]	2003 Dec 06.5
(87) Sylvia, <i>satellite Romulus</i>	1351.35 ± 0.01 [6]	0.0069 ± 0.0037 [6]	1.7 ± 1.0 [45]	175 ± 23 [105]	193.17 ± 1.85 [6]	167 ± 23 [6]	2004 Sep 01.0
(87) Sylvia, <i>satellite Remus</i>	701.64 ± 0.02 [6]	0.093 ± 0.021 [6]	2.0 ± 1.0 [45]	135 ± 9 [105]	194.28 ± 6.27 [6]	-79 ± 9 [6]	2004 Sep 01.0

(90) Antiope, satellite S/2000 (90) 1	171 ± 1 [18]	0.003 ± 0.003 [18]	63.7 ± 2.0 [18]	-	-	-	-
(66391) 1999 KW4, satellite "Beta"	2.548 ± 0.015 [58]	0.0004 ± 0.0019 [58]	156.1 ± 2 [58]	319.7 ± 182 [58]	105.4 ± 3 [58]	-	-
(136108) Haumea, satellite Hi'iaka	49880 ± 198 [61]	0.0513 ± 0.0078 [61]	126.356 ± 0.064 [61]	154.1 ± 5.8 [61]	206.766 ± 0.033 [61]	152.8 ± 6.1 [61]	-
(136108) Haumea, satellite Namak	25657 ± 91 [61]	0.249 ± 0.015 [61]	113.013 ± 0.075 [61]	178.9 ± 2.3 [61]	205.016 ± 0.228 [61]	178.5 ± 1.7 [61]	-
(136617) 1994 CC, satellite "Beta"	1.729 ± 0.008 [23]	0.002 ± 0.015 [23]	83.376 ± 11.158 [23]	130.980 ± 43.647 [23]	59.209 ± 3.91 [23]	233.699 ± 43.941 [23]	2009 Jun 12.0
(136617) 1994 CC, satellite "Gamma"	6.130 ± 0.108 [23]	0.192 ± 0.014 [23]	71.709 ± 8.994 [23]	96.229 ± 5.017 [23]	96.229 ± 5.017 [23]	6.070 ± 6.187 [23]	2009 Jun 12.0
(153591) 2001 SN263, satellite "Beta"	16.633 ± 0.163 [23]	0.015 ± 0.009 [23]	157.486 ± 1.819 [23]	131.249 ± 21.918 [23]	161.144 ± 13.055 [23]	212.658 ± 10.691 [23]	2008 Feb 13.0
(153591) 2001 SN263, satellite "Gamma"	3.804 ± 0.002 [23]	0.016 ± 0.002 [23]	165.045 ± 12.409 [23]	292.435 ± 53.481 [23]	198.689 ± 61.292 [23]	248.816 ± 11.509 [23]	2008 Feb 13.0
(385446) Manwe, satellite Thorondor	6674 ± 41 [37]	0.5632 ± 0.0070 37]	25.58 ± 0.23 [37]	250.8 ± 1.9 [37]	163.56 ± 0.78 [37]	126.51 ± 0.49 [37]	2007 Oct 26.5

Вище сказано, що у супутників систем деякі періоди коливань Кеплерових елементів орбіт збігаються, що може бути викликано одним впливом, за допомогою Таблиці 3.9, можна зробити висновки про причини цих збігів. У астероїдній системі (87) Sylvia у супутника Romulus $Period\ 2_e \approx Period\ 2_\omega$ результат орбітального руху супутника, $Period\ 1_i \approx Period\ 1_\Omega$ результат орбітального руху астероїдної системи (87) Sylvia, як і у супутника Remus $Period\ 2_a \approx Period\ 1_e$, а відповідність $Period\ 3_a \approx Period\ 2_e$ є наслідком періодичних зближень з Юпітером. Так само видно однакові коливання в нахилі орбіт $Period\ 2_i$, $Period\ 3_i$, $Period\ 4_i$, обох супутників системи. $Period\ 2_i$, результат орбітального руху системи, а інші, результат орбітального руху супутників. У супутників астероїдної системи (136108) Haumea, добре виділяються коливання з великими і малими періодами, і як видно з Таблиці 3.9, в кожному Кеплеровому

Таблиця 3.7.

Положення та швидкість супутників системи (134340) Pluto [14]

(в баріцентричній системі координат)

Супутник		Положення, км		Швидкість, км/с
Charon	x	1297.17438478526	V_x	0.1453959508510873
	y	3752.60226174718	V_y	0.1297771902069882
	z	17011.90583845352	V_z	-0.0397230039699411
Styx	x	-30572.84277725838	V_x	0.0232883188913688
	y	-26535.81343448966	V_y	0.0427977975396927
	z	12311.29089587663	V_z	0.1464990283534413
Nix	x	9024.34878023784	V_x	0.1004334400015913
	y	15210.73701650077	V_y	0.0865524814427462
	z	45591.75735722126	V_z	-0.0479498746416020
Kerberos	x	23564.20702505210	V_x	0.0792537025667567
	y	28380.03995076242	V_y	0.0630220099842493
	z	44578.02582182780	V_z	-0.0817084451068904
Hydra	x	-43331.32611324427	V_x	-0.0374001037580065
	y	-43628.45759453865	V_y	-0.0184905610710285
	z	-20506.54193573317	V_z	0.1157937282701088

елементі орбіти супутників є однакові періоди коливань. *Period 1_a*, *Period 1_e*, *Period 1_i*, *Period 1_Ω*, коливання з великими періодами, викликані орбітальним рухом астероїдної системи (136108) Haumea. Відповідність короткоперіодичних коливань *Period 2_i*, *Period 1_ω*, *Period 2_ω*, *Period 2_Ω*, Кеплерових елементів орбіти, залежить від орбітального руху супутників. Тільки у одного супутника Gamma астероїдної системи (136617) 1994CC, знайдені відповідності в коливаннях Кеплерових елементів орбіти: *Period 1_a* \approx *Period 3_e*, результат орбітального руху астероїдної системи (136617) 1994CC і *Period 4_e* \approx *Period 2_ω*, результат періодичних зближень з Землею.

Таблиця 3.8.

Періоди зміни Кеплерових елементів орбіт супутників (в роках)

Номер періода	(45) Eugenia		(87) Sylvia		(90) Antiope	(66391) 1999 KW4
	Petit-Prince	Princesse	Romulus	Remus	S/2000 (90)1	Beta
<i>Period 1: a</i>	2.930	1.016	1.234	8.007	1.325	3.616
<i>Period 2: a</i>	2.339	1.682	0.225	0.609	-	1.312
<i>Period 3: a</i>	-	-	0.165	0.276	-	-
<i>Period 4: a</i>	-	-	0.103	-	-	-
<i>Period 1: e</i>	2.927	1.015	13.710	0.609	6.816	1.562
<i>Period 2: e</i>	2.338	1.590	0.193	0.276	1.645	1.015

<i>Period 3: e</i>	-	-	-	0.145	1.325	-
<i>Period 4: e</i>	-	-	-	0.113	1.109	-
<i>Period 1: i</i>	7.262	63.926	11.638	7.944	1.325	2.052
<i>Period 2: i</i>	4.040	17.751	1.287	1.287	-	1.094
<i>Period 3: i</i>	3.733	12.532	0.223	0.223	-	-
<i>Period 4: i</i>	-	-	0.193	0.195	-	-
<i>Period 1: ω</i>	6.216	59.067	5.923	6.903	4.348	1.691
<i>Period 2: ω</i>	4.577	7.169	0.196	0.586	2.658	1.378
<i>Period 3: ω</i>	-	1.616	-	0.293	1.906	1.075
<i>Period 4: ω</i>	-	1.247	-	-	-	-
<i>Period 1: Ω</i>	16.641	4.322	11.638	1.159	1.037	2.046
<i>Period 2: Ω</i>	4.949	1.638	0.193	0.579	-	1.313
<i>Period 3: Ω</i>	-	1.095	-	0.386	-	1.078
<i>Period 4: Ω</i>	-	-	-	0.283	-	-

Різна кількість відповідностей у коливаннях Кеплерових елементів орбіт супутників, для різних астероїдних систем, може бути викликана їх розташуванням в Сонячній системі. Для (87) Sylvania і (136617) 1994CC діють більше збурюючих факторів при русі їх супутників в порівнянні з супутниками (136108) Naumea.

Крім того, знайдені вікові зміни в аргументі перицентра і довготі висхідного вузла супутників Petit-Prince і Princesse астероїда (45) Eugenia та супутників Romulus і Remus астероїда (87) Sylvania; нахилу, аргументі перицентра і довготі висхідного вузла Charon системи (134340) Pluto, аргументі перицентра супутників

Таблиця 3.8. (продовження)

Періоди зміни Кеплерових елементів орбіт супутників (в роках)

Номер періода	(134340) Pluto					(385446) Manwe
	Charon	Nix	Hydra	Kerberos	Styx	Thorondor
<i>Period 1: a</i>	19.651	19.690	2.057	2.429	1.072	5.624
<i>Period 2: a</i>	2.051	-	1.959	1.162	-	2.812
<i>Period 3: a</i>	-	-	-	-	-	1.934
<i>Period 1: e</i>	14.029	19.690	1.958	2.434	1.071	64.746
<i>Period 2: e</i>	3.577	2.112	-	1.315	-	5.621
<i>Period 3: e</i>	2.275	-	-	1.161	-	2.811
<i>Period 4: e</i>	-	-	-	-	-	1.930
<i>Period 1: i</i>	82.788	4.692	13.951	9.043	2.632	>100
<i>Period 2: i</i>	61.588	-	-	-	-	51.797
<i>Period 3: i</i>	-	-	-	-	-	6.239
<i>Period 4: i</i>	-	-	-	-	-	2.949

<i>Period 1: ω</i>	>100	3.574	14.127	9.208	55.804	88.597
<i>Period 2: ω</i>	14.088	1.639	2.715	3.311	1.051	41.396
<i>Period 3: ω</i>	3.577	1.123	2.277	-	-	-
<i>Period 3: ω</i>	2.276	-	-	-	-	-
<i>Period 1: Ω</i>	>100	4.694	13.951	9.043	2.632	>100
<i>Period 2: Ω</i>	13.990	-	-	-	-	52.064
<i>Period 3: Ω</i>	3.576	-	-	-	-	-
<i>Period 4: Ω</i>	2.276	-	-	-	-	-

Ні'іака і Намака об'єкта (136108) Haumea; ексцентриситеті, аргументі перицентра і довготі висхідного вузла супутника Beta астероїда (136617) 1994 CC; нахилі, аргументі перицентра і довготі висхідного вузла супутника Gamma астероїда (136617) 1994 CC; нахилі, аргументі перицентра і довготі висхідного вузла супутника "Beta" астероїда (153591) 2001 SN2; аргументі перицентра і довготі висхідного вузла супутника "Gamma" астероїда (153591) 2001 SN2; нахилі, аргументі перицентра і довготі висхідного вузла супутника "Thorondor" об'єкта (385446) Manwe.

Таблиця 3.8. (продовження)

Періоди зміни Кеплерових елементів орбіт супутників (в роках)

Номер періода	(136108) Haumea		(136617) 1994CC		2001 SN263	
	Ні'іака	Namaka	Beta	Gamma	Beta	Gamma
<i>Period 1: a</i>	25.019	25.019	0.872	4.259	1.369	1.368
<i>Period 2: a</i>	0.458	1.118	-	0.411	-	1.035
<i>Period 3: a</i>	0.325	0.443	-	-	-	-
<i>Period 1: e</i>	>100	>100	0.380	>100	4.249	4.276
<i>Period 2: e</i>	1.168	9.099	-	21.293	2.019	-
<i>Period 3: e</i>	-	0.441	-	4.259	1.370	-
<i>Period 4: e</i>	-	-	-	1.599	-	-
<i>Period 5: e</i>	-	-	-	0.455	-	-
<i>Period 1: i</i>	18.883	18.883	20.137	20.016	>100	3.202
<i>Period 2: i</i>	0.192	0.192	-	-	3.201	-
<i>Period 1: ω</i>	0.380	0.381	10.110	20.424	78.296	4.052
<i>Period 2: ω</i>	0.190	0.190	5.048	1.599	37.549	-
<i>Period 3: ω</i>	-	-	3.367	-	-	-
<i>Period 1: Ω</i>	18.883	18.883	16.407	0.190	>100	3.202
<i>Period 2: Ω</i>	0.188	0.188	-	-	52.882	-

В результаті, ми бачимо коливання Кеплерових елементів орбіт (Таблиця 3.8), які спостерігаються для всіх тіл Сонячної системи. Для великих планет

вивчені вікові збурення [53]. В астероїдних системах спостерігаються як вікові збурення так і короткоперіодичні, що в свою чергу можна пояснити наслідком менших відносних мас даних систем в порівнянні з великими планетами.

Таблиця 3.9.

**Співвідношення між орбітальними періодами і періодами коливань
Кеплерових елементів орбіти (в роках)**

(87) Sylvia	(136108) Haumea	(136617) 1994CC
Romulus	Hi'iaka	Beta
$P1_a \times 48 - P_{Jupiter} \times 5 = -0.064$	$P1_a \times 34 - P_{Haumea} \times 3 = -0.19$	$P1_a \times 8 - P_{Earth} \times 7 = -0.027$
$P2_a \times 1 - P_{Romulus} \times 23 = -0.001$	$P2_a \times 3 - P_{Hi'iaka} \times 10 = 0.02$	-
$P3_a \times 1 - P_{Romulus} \times 17 = -0.003$	$P3_a \times 5 - P_{Hi'iaka} \times 12 = -0.001$	-
$P4_a \times 1 - P_{Romulus} \times 10 = 0.004$	-	-
$P1_e \times 9 - P_{Sylvia} \times 19 = -0.050$	$P1_e \times 2 - P_{Haumea} \times 1 \approx 0$	$P1_e \times 5 - P_{Mars} \times 1 = 0.019$
$P2_e \times 1 - P_{Romulus} \times 20 = -0.004$	$P2_e \times 1 - P_{Hi'iaka} \times 9 = -0.05$	-
$P1_i \times 24 - P_{Sylvia} \times 43 = -0.056$	$P1_i \times 15 - P_{Haumea} \times 1 = -0.36$	$P1_i \times 5 - P_{1994CC} \times 48 = 0.076$
$P2_i \times 5 - P_{Sylvia} \times 1 = -0.064$	$P2_i \times 2 - P_{Hi'iaka} \times 3 = -0.02$	-
$P3_i \times 1 - P_{Romulus} \times 23 = -0.0035$	-	-
$P4_i \times 1 - P_{Romulus} \times 20 = -0.004$	-	-
$P1_\omega \times 2 - P_{Jupiter} \times 1 = -0.016$	$P1_\omega \times 1 - P_{Hi'iaka} \times 3 = -0.03$	$P1_\omega \times 8 - P_{Mars} \times 43 = 0.006$
$P2_\omega \times 1 - P_{Romulus} \times 20 = -0.001$	$P2_\omega \times 2 - P_{Hi'iaka} \times 3 = -0.03$	$P2_\omega \times 1 - P_{Earth} \times 5 = 0.048$
-	-	$P3_\omega \times 5 - P_{1994CC} \times 8 = 0.066$
$P1_\Omega \times 24 - P_{Sylvia} \times 43 = -0.056$	$P1_\Omega \times 15 - P_{Haumea} \times 1 = -0.36$	$P1_\Omega \times 6 - P_{1994CC} \times 47 = -0.069$
$P2_\Omega \times 1 - P_{Romulus} \times 20 = -0.004$	$P2_\Omega \times 3 - P_{Hi'iaka} \times 4 = -0.02$	-
(87) Sylvia	(136108) Haumea	(136617) 1994CC
Remus	Namaka	Gamma
$P1_a \times 40 - P_{Jupiter} \times 27 = 0.026$	$P1_a \times 34 - P_{Haumea} \times 3 = -0.19$	$P1_a \times 1 - P_{1994CC} \times 2 = 0.067$
$P2_a \times 32 - P_{Sylvia} \times 3 = -0.007$	$P2_a \times 1 - P_{Namaka} \times 22 = 0.02$	$P2_a \times 5 - P_{1994CC} \times 1 = -0.042$
$P3_a \times 43 - P_{Jupiter} \times 1 = 0.025$	$P3_a \times 1 - P_{Namaka} \times 9 = -0.01$	-
$P1_e \times 32 - P_{Sylvia} \times 3 = -0.007$	$P1_e \times 2 - P_{Haumea} \times 1 \approx 0$	-
$P2_e \times 43 - P_{Jupiter} \times 1 = 0.025$	$P2_e \times 163 - P_{Neptune} \times 9 = 0.09$	$P2_e \times 3 - P_{Mars} \times 34 = -0.068$
$P3_e \times 1 - P_{Remus} \times 38 = -0.001$	$P3_e \times 1 - P_{Namaka} \times 9 = -0.01$	$P3_e \times 1 - P_{1994CC} \times 2 = 0.067$
$P4_e \times 1 - P_{Remus} \times 29 = 0.002$	-	$P4_e \times 5 - P_{Earth} \times 8 = -0.005$
-	-	$P5_e \times 2 - P_{Earth} \times 1 = -0.091$
$P1_i \times 9 - P_{Sylvia} \times 11 = 0.027$	$P1_i \times 15 - P_{Haumea} \times 1 = -0.36$	$P1_i \times 1 - P_{Earth} \times 20 = 0.016$
$P2_i \times 5 - P_{Sylvia} \times 1 = -0.064$	$P2_i \times 1 - P_{Namaka} \times 4 = -0.01$	-
$P3_i \times 29 - P_{Sylvia} \times 1 = -0.026$	-	-
$P4_i \times 33 - P_{Sylvia} \times 1 = -0.069$	-	-
$P1_\omega \times 16 - P_{Sylvia} \times 17 = -0.002$	$P1_\omega \times 1 - P_{Namaka} \times 8 = -0.02$	$P1_\omega \times 4 - P_{1994CC} \times 39 = -0.046$
$P2_\omega \times 11 - P_{Sylvia} \times 1 = -0.047$	$P2_\omega \times 1 - P_{Namaka} \times 4 = -0.01$	$P2_\omega \times 5 - P_{Earth} \times 8 = 0.005$
$P3_\omega \times 22 - P_{Sylvia} \times 1 = -0.047$	-	-
$P1_\Omega \times 28 - P_{Sylvia} \times 5 = -0.046$	$P1_\Omega \times 15 - P_{Haumea} \times 1 = -0.36$	$P1_\Omega \times 1 - P_{Gamma} \times 8 = 0.006$
$P2_\Omega \times 41 - P_{Jupiter} \times 2 = 0.027$	$P2_\Omega \times 37 - P_{Namaka} \times 4 = -0.01$	-
$P3_\Omega \times 17 - P_{Sylvia} \times 1 = 0.068$	-	-
$P4_\Omega \times 23 - P_{Sylvia} \times 1 = 0.012$	-	-

3.5 Резонанс Kozai в системах малих тіл

Ще один з видів резонансів, що зустрічається в Сонячній системі – це ефект Kozai або резонанс Kozai. Резонанс Kozai [41], [53] це періодична зміна співвідношення ексцентриситету і нахилу орбіти під впливом потужного тіла або тіл (в нашому випадку центральне тіло системи), за умови, що нахил орбіт супутника перевищує граничне значення. Граничне значення або кут Kozai – це мінімальний кут при якому може спостерігатися даний ефект. Він дорівнює 39.2° для прямого руху і 140.8° для ретроградного.

Якщо супутник знаходиться в резонансі Kozai, то повинна виконуватися рівність:

$$\sqrt{1-e^2} \cos i = const . \quad (3.47)$$

Для всіх супутників дев'яти обраних малих тіл була розрахована величина (3.47), на проміжку часу 100 років і 1000 років. На Рис. С.19 - С.22 показана зміна цієї величини.

Видно, що супутник S/2000 (90) 1 астероїда (90) Antiope, супутник Namaka ТНО (136108) Haumea та супутники Beta і Gamma астероїда (136617) 1994 CC не знаходяться в резонансі Kozai.

Супутник Princesse астероїда (45) Eugenia, супутник Beta астероїда (66391) 1999 KW4, супутник Hi'iaka ТНО (136108) Haumea та супутник Gamma астероїда (153591) 2001 SN263 наближаються до резонансу Kozai.

А супутник Petit-Prince астероїда (45) Eugenia, супутники Romulus і Remus астероїда (87) Sylvia, супутники Charon, Styx, Nix, Kerberos і Hydra карликової планети (134340) Pluto, супутник Beta астероїда (153591) 2001 SN263 і супутник Thorondor подвійного ТНО (385446) Manwe з точністю до тисячних величини (3.11) знаходиться в резонансі Kozai.

3.6 Точність інтегрування диференціальних рівнянь руху

При використанні чисельного інтегрування рівнянь руху потрібен обов'язковий контроль збіжності моделі або, так званий, контроль кроку інтегрування. Методами прямого-зворотнього інтегрування і подвоєння кроку інтегрування рівнянь руху на інтервалі 100 років з кроком 30 секунд, отримана величина розбіжності чисельної моделі побудованої автором, яка не перевищує $10^{-6} - 10^{-7}$ метра.

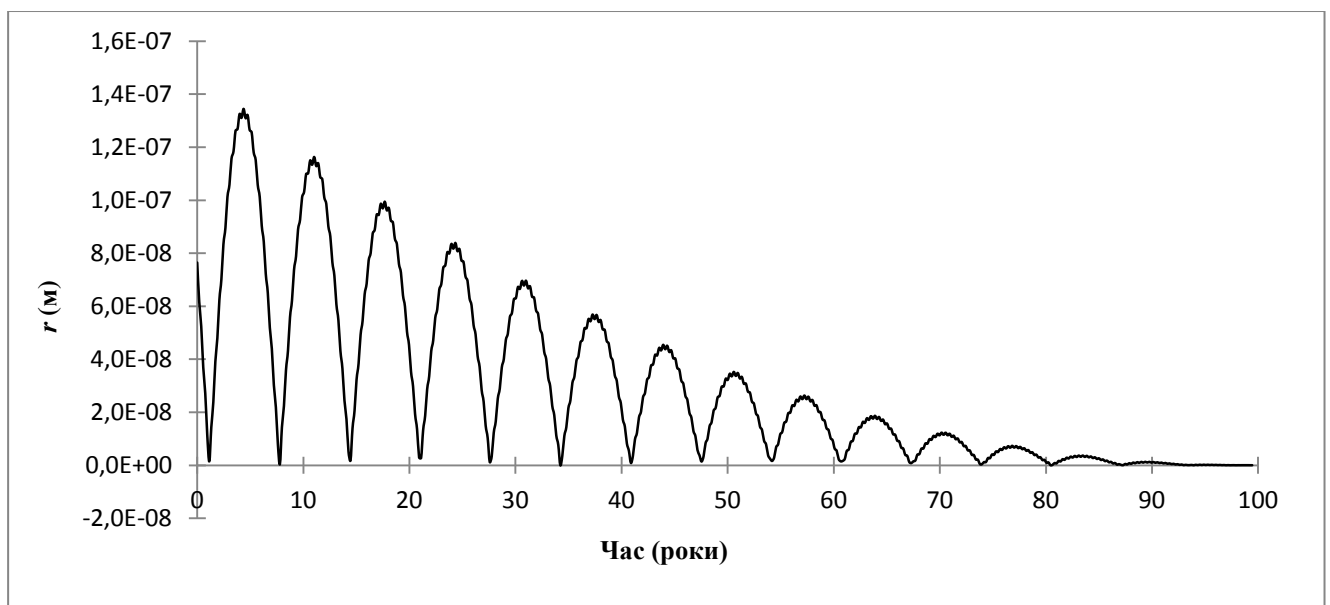


Рис. 3.15. Розбіжність в положенні супутника астероїда 1999KW4, при використанні прямого – зворотнього метода перевірки точності інтегрування диференціальних рівнянь руху

Використовуючи закон збереження енергії, маємо: в замкнутій системі N тіл, сума кінетичної (T) та потенційної ($-U$) енергій постійна:

$$T - U = const. \quad (3.48)$$

Тому можливо застосувати цю умову, як критерій стійкості чисельної моделі. Для зручності використання, запишемо вираз (3.48) в наступному вигляді:

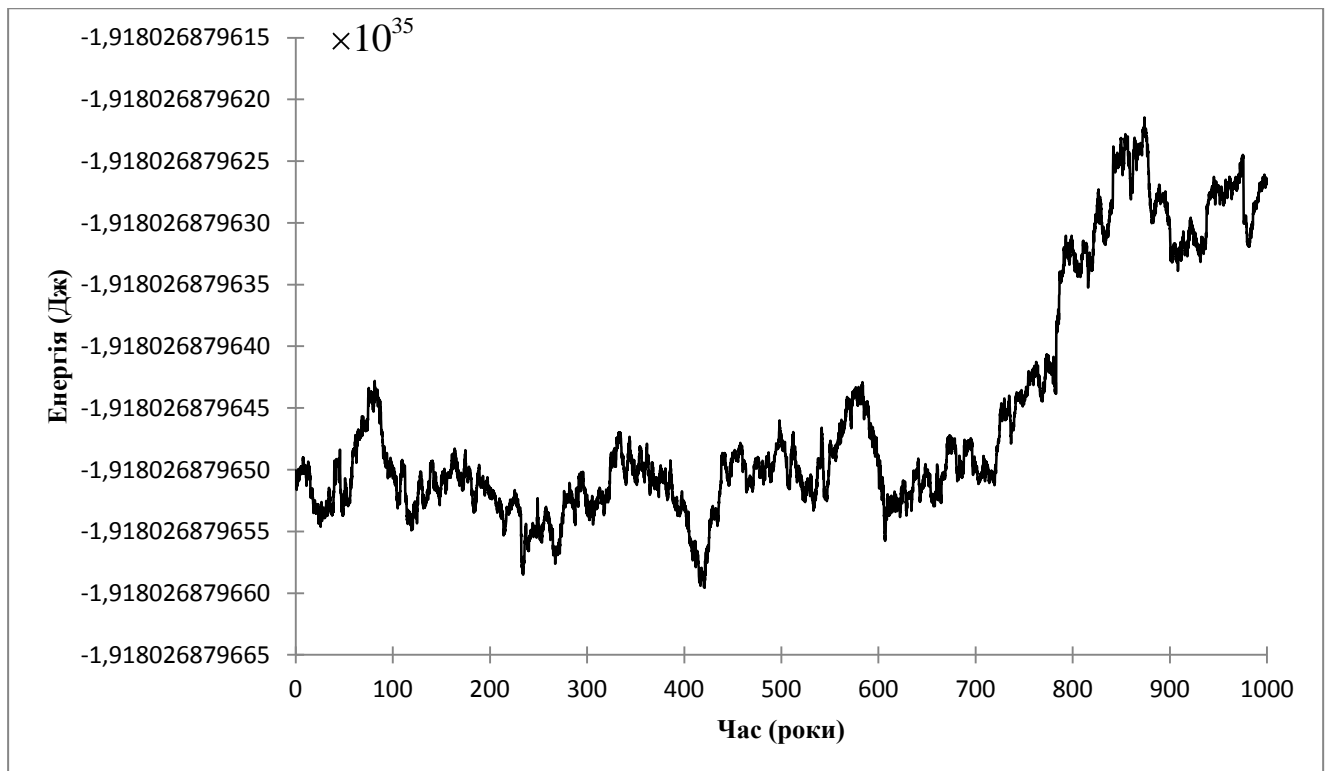


Рис. 3.16. Зміна механічної енергії системи (134340) Pluto при інтегруванні на протязі 1000 років

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\left(x'_i - \frac{\sum_{i=1}^N m_i x'_i}{M} \right)^2 + \left(y'_i - \frac{\sum_{i=1}^N m_i y'_i}{M} \right)^2 + \left(z'_i - \frac{\sum_{i=1}^N m_i z'_i}{M} \right)^2 \right) - G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = const, \quad (3.49)$$

де $M = \sum_{i=1}^N m_i$.

На Рис.3.16, наведено приклад зміни механічної енергії системи (134340) Pluto, отриманий з кроком інтегрування 100 секунд. Також для цієї системи контроль кроку інтегрування, методом прямого-зворотнього інтегрування показав найбільшу розбіжність для Kerberos – 50 метрів і метод подвійного кроку інтегрування показав найбільшу розбіжність для Charon – 87 метрів.

Короткі висновки до Розділу 3

В Розділі 3 наведені умови розриву 168 астероїдних систем, розраховані резонанси в деяких з них. Вперше наведені орбітальні і фізичні характеристики гіпотетичного супутника-пастуха у астероїда (10199) Chariklo. Детально розглянуті дев'ять систем малих тіл, з подальшим періодограмним аналізом отриманих змін в Кеплерових елементах орбіт. Для трьох з девяти систем, показана залежність змін Кеплерових елементів орбіт від орбітальних періодів близьких планет і руху самої системи по геліоцентричній орбіті.

ВИСНОВКИ

Впроваджено нове програмне забезпечення для пошуку невідомих об'єктів Сонячної системи, що дозволило підвищити проникну здатність телескопа ОМТ-800 з 19^m до 21^m . В результаті оглядових спостережень подвійних і кратних малих тіл Сонячної системи, було відкрито два малих тіла, одне з яких ідентифіковано як раніше загублений астероїд.

Розраховані відстані розриву для 168 подвійних і кратних малих тіл Сонячної системи.

Знайдено 10 орбітальних, 26 спін-орбітальних і 28 спін-спінових резонансів в обраних подвійних і кратних системах малих тіл.

Вперше обчислені: маса, велика піввісь орбіти, орбітальний період, резонанси гіпотетичного супутника-пастуха астероїда (10199) Chariklo.

Вперше обчислені 5 коефіцієнтів розкладання по сферичним функціям потенціалу гравітаційного поля обраних компонентів астероїдних систем. Не всі значення збігаються з отриманими раніше результатами попередніх робіт. Це може бути пов'язано з відмінністю вихідних даних та методами їх отримання.

Побудована чисельна модель руху в системах подвійних та кратних малих тіл Сонячної системи. В моделі враховано тяжіння Сонця та великих планет, асиметрію малих тіл, тиск сонячного світла з урахуванням тіньової функції. Модель дозволила виявити деякі особливості еволюції орбіт супутників в астероїдних системах.

Чисельна модель апробована на подвійних і кратних малих тілах Сонячної системи: (45) Eugenia, (87) Sylvia, (90) Antiope, (66391) 1999 KW4, (134340) Pluto, (136108) Haumea, (136617) 1994 CC, (153591) 2001 SN263, (385446) Manwe. Отримані зміни Кеплерових елементів орбіт на інтервалі 100 років і 1000 років в цілому підтверджують результати, отримані іншими авторами. Знайдено вікові зміни в деяких Кеплерових елементах орбіт супутників. У всіх елементах орбіт обчислені величини періодичних змін і запропоновані можливі причини їх

походження. Так само знайдені однакові періодичні коливання в Кеплерових елементах орбіт одного і того ж супутника.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Большасова Л. Адаптивная оптика на пути к решению загадок астрономии / Большасова Л. // Наука и жизнь. – 2012. – № 1. – С. 70-72.
2. Холодова С.Е. Специальные функции в задачах математической физики / С.Е. Холодова, С.И. Перегудин // СПб: НИУ ИТМО. – 2012.
3. Andrievsky S.M. A NEW 800 mm AUTOMATIC TELESCOPE / S.M. Andrievsky, I.E. Molotov, N.N. Fashchevsky, S.V. Podlesnyak, V.V. Zhukov, V.V. Kouprianov, S.G. Kashuba, V.I. Kashuba, V.F. Mel'nichenko, Yu.M. Gorbanev // Odessa Astronomical Publications. – 2013. – Vol. 26. – Issue 1. – P 6-25.
4. Andronov I.L. ALGORITHM OF THE ARTIFICIAL COMPARISON STAR FOR THE CCD PHOTOMETRY / Andronov I.L., Baklanov A.V. // Astronomy School Reports. – 2004. – Vol. 5. – P 264-272.
5. Bazyey A.A. USING OF EVERHART'S METHOD OF 15, 17, 19 AND 21st-ORDER FOR COMPUTATION OF CELESTIAL BODIES' TRAJECTORIES IN THE CIRCUMPLANETARY SPACE / Bazyey A.A., Kara I.V. // Astronomical School's Report. - 2009. – Vol. 6. – Issue 2. – P 155-157.
6. Beauvalet L. Multiple asteroid systems (45) Eugenia and (87) Sylvia: Sensitivity to external and internal perturbations / Beauvalet L., and F. Marchis // Icarus. – 2014. – Vol. 241. – P. 13-25.
7. Berard D. / Berard D., Sicard B. et al. // American Astronomical Society. – 2015. – Vol. 47. – P. 104.02.
8. Berthier J. Physical and dynamical properties of the main belt triple Asteroid (87) Sylvia / Berthier, J., F. Vachier, F. Marchis, J. Durech, and B. Carry // Icarus. – 2014. – Vol. 239. – P. 118-130.
9. Benner, L. A. M. 2006 VV_2 / L. A. M. Benner, S. J. Ostro, and J. D. Giorgini // Jet Propulsion Laboratory (JPL). – 2007. – Vol. 8826.
10. Bonomi R. Observations and Orbits of Comets / Bonomi R., Facchini M., Negrelli P [...] Troianskyi V. [...] // Minor Planet Electronic Circ. – 2014, 2015,

- 2016, 2017. No.2015-J41, No.2015-Q71, No.2015-U54, No.2015-H37, No.2015-E14, No.2015-N31, No. 2016-Q04, No. 2016-M09, No. 2016-K18, No. 2017-A77.
11. Braga-Ribas F. A ring system detected around the Centaur (10199) Chariklo / F. Braga-Ribas, B. Sicardy [...] D. G. Lambas // *Nature*. – 2014. – Vol. 508. – P. 72.
12. Brozovic, M. (136617) 1994 CC / Brozovic, M., Benner, L. A. M., Nolan, M. C., Howell, E. S., Magri, C., Giorgini, J. D., Taylor, P. A., Margot, J. L., Busch, M. W., Shepard, M. K., Carter, L. M., Jao, J. S., van Brimmer, J., Franck, C. R., Silva, M. A., Kodis, M. A., Kelley, D. T., Slade, M. A., Bramson, A., Lawrence, K. J., Pollock, J. T., Pravec, P., Reichart, D. E., Ivarsen, K. M., Haislip, J., Nysewander, M. C., & Lacluyze, A. P. // *International Astronomical Union Circular*. – 2009. – Vol. 9053.
13. Brozovic M. Radar and optical observations and physical modeling of triple near-Earth asteroid (136617) 1994 CC / Marina Brozović, Lance A.M. Benner, Patrick A. Taylor, Michael C. Nolan, Ellen S. Howell, Christopher Magri, Daniel J. Scheeres, Jon D. Giorgini, Joseph T. Pollock, Petr Pravec, Adrián Galád, Julia Fang, Jean-Luc Margot, Michael W. Busch, Michael K. Shepard, Daniel E. Reichart, Kevin M. Ivarsen, Joshua B. Haislip, Aaron P. LaCluyze, Joseph Jao, Martin A. Slade, Kenneth J. Lawrence, Michael D. Hicks // *Icarus*. – 2011. – Vol. 216. – P. 241-256.
14. Brozovic M. The orbits and masses of satellites of Pluto / M. Brozovic, M. R. Showalter, R. A. Jacobson, and M. W. Buie // *Icarus*. – 2015. – Vol. 246. – P. 317-329.
15. Brown, M. E. S/2001 (87) 1 / Brown, M. E., and J. L. Margot // *International Astronomical Union Circular*. – 2001. – Vol. 7588.
16. Brown M. E. S/2005 (2003 EL_61) 2 / Brown M. E. // *International Astronomical Union Circular*. – 2005. – Vol. 8636.
17. Buie M. W. THE ORBIT OF CHARON IS CIRCULAR / Marc W. Buie, David J. Tholen and William M. Grundy // *The Astronomical Journal*. – 2012. – Vol. 144. – P. 15.

- 18.Descamps P. Figure of the double Asteroid 90 Antiope from adaptive optics and lightcurve observations / P. Descamps, F. Marchis, T. Michalowski, F. Vachier, F. Colas, J. Berthier, M. Assafin, P.B. Dunckel, M. Polinska, W. Pych, D. Hestroffer, K.P.M. Miller, R. Vieira-Martins, M. Birlan, J.-P. Teng-Chuen-Yu, A. Peyrot, B. Payet, J. Dorseuil, Y. Léonie, T. Dijoux // *Icarus*. – 2007. – Vol. 187. – P. 482-499.
- 19.Duboshin G. N. in: *Celestial Mechanics and Astrodynamics* / Duboshin G. N. // *A Handbook*, Moscow, Nauka. – 1976.
- 20.Dunham D. W. Satellite of Minor Planet 532 Herculina Discovered During Occultation / Dunham David W. // *The Minor Planet Bulletin*. – 1978. – Vol. 6. – P. 13-14.
- 21.Dunham D. W. Possible Observation of a Satellite of a Minor Planet / Dunham David W., Maley Paul D. // *The Minor Planet Bulletin*. – 1977. – Vol. 5. – P. 16-17.
- 22.Everhart E. Implicit Single-Sequence Methods for Integrating Orbits / Everhart E. // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. – 1974. – Vol. 10. – P. 35-55.
- 23.Fang, J. Orbits of near-Earth asteroid triples 2001 SN263 and 1994 CC: Properties, origin, and evolution / J. Fang, J.-L. Margot, M. Brozovic, M. C. Nolan, L. A. M. Benner, and P. A. Taylor // *The Astronomical Journal*. – 2011. – Vol. 141. – P. 154-168.
- 24.Fang, J. Near-Earth binaries and triples: Origin and evolution of spin-orbital properties / Fang, J., and J.-L. Margot // *The Astronomical Journal*. – 2012. – Vol. 143. – P. 24.
- 25.Fang J. Orbits, masses, and evolution of main belt triple (87) Sylvia / J. Fang, J.-L. Margot, and P. Rojo // *The Astronomical Journal*. – 2012. – Vol. 144. – P. 70-82.
- 26.Ferraz Mello S. Analytical Study of the Earth's Shadowing Effects on Satellite Orbits / Ferraz Mello S. // *Celestial Mechanics*. – 1972. – Vol. 5. – P. 80-101.

27. Folkner W.M. in: The Planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431 / W.M. Folkner, James G. Williams, Dale Boggs, Ryan Perk, P. Kuchynka // Interoffice Memo, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, CA. – 2014.
28. Fornasier S. TNOs are Cool: A survey of the trans-Neptunian region VIII. Combined Herschel PACS and SPIRE observations of nine bright targets at 70–500 μm / S. Fornasier, E. Lellouch, T. Müller, P. Santos-Sanz, P. Panuzzo, C. Kiss, T. Lim, M. Mommert, D. Bockelée-Morvan, E. Vilenius, J. Stansberry, G. P. Tozzi, S. Mottola, A. Delsanti, J. Crovisier, R. Duffard, F. Henry, P. Lacerda, A. Barucci and A. Gicquel // *Astronomical and Astrophysical*. – 2013. – Vol. 555. – Article A15.
29. Frouard J. Evolution of Small Binary Asteroids with the Binary YORP Effect / Frouard Julien // *American Astronomical Society*. – 2013. – DDA meeting #44. – id.102.03.
30. Gipson L. New Horizons Picks Up Styx / Gipson L. // NASA. [сайт] – URL: [<https://www.nasa.gov/nh/new-horizons-picks-up-styx>] (2015).
31. Goldreich P. Tidal Evolution of Rubble Piles / Goldreich Peter, Re'em Sari // *The Astrophysical Journal*. – 2009. – Vol. 691. – P. 54-60.
32. Green D. W. E. Satellites of minor planets / Green D. W. E. // *International Astronomical Union Circular*. – 2000. – Vol. 7503.
33. Green D. W. E. 2003 EL_61, 2003 UB_313, and 2005 FY_9 / Green D. W. E. // *International Astronomical Union Circular*. – 2005. – Vol. 8577.
34. Green D. W. E. Satellites of Pluto / Green D. W. E. // *International Astronomical Union Circular*. – 2006. – Vol. 8723.
35. Green D. W. E. (136108) Haumea / Green D. W. E. // *International Astronomical Union Circular*. – 2008. – Vol. 8976.
36. Green D. W. E. New names of satellites of (134340) Pluto / Green D. W. E. // *Central Bureau Electronic Telegrams* – 2013. – Vol. 3575.
37. Grundy W. M. Orbit status of known binary TNOs / Grundy, W. M., et al. // [Электронный ресурс] – URL: [<http://www2.lowell.edu/users/grundy/tnbs/status.html>] (2014).

- 38.Hodgson R. G. Reflections upon 532 Herculina and its Satellite / Hodgson Richard G. // *The Minor Planet Bulletin*. – 1978. – Vol. 6. – P. 17-18.
- 39.Jinglang F. Modeling and analysis of periodic orbits around a contact binary asteroid / Jinglang Feng, Ron Noomen, Pieter N.A.M. Visser, Jianping Yuan // *Astrophysics and Space Science*. – 2015. – Vol. 357. – P. 124.
- 40.Kaasalainen M. Binary structures among large asteroids / Kaasalainen M., Torppa J., Piironen J. // *Astronomy and Astrophysics*. – 2002. – Vol. 383. – P. L19-L22.
- 41.Kozai Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity / Kozai Yoshihide // *The Astronomical Journal*. – 1962. – Vol. 67. – P. 591.
- 42.Lawton A. T. Charon – a companion to Pluto / Lawton A. T. // *Spaceflight*. – 1978. – Vol. 20. – P. 428-429.
- 43.Lellouch E. Thermal properties of Pluto's and Charon's surfaces from Spitzer observations / E. Lellouch, J. Stansberry, J. Emery, W. Grundy, and D. P. Cruikshank // *Icarus*. – 2011. – Vol. 214. – P. 701-716.
- 44.Magnusson P. Asteroid Spin Vector Determinations version 4 / Magnusson P. // *Small Bodies Node*. – 1995.
- 45.Marchis F. Discovery of the triple asteroidal system 87 Sylvania / Marchis, F., P. Descamps, D. Hestroffer, and J. Berthier // *Nature*. – 2005. – Vol. 436. – P. 822.
- 46.Marchis F. Satellites of (87) Sylvania / Marchis, F., P. Descamps, D. Hestroffer, and J. Berthier // *International Astronomical Union Circular*. – 2005. – Vol. 8582.
- 47.Marchis F. S/2004 (45) 1 / Marchis, F., M. Baek, P. Descamps, J. Berthier, D. Hestroffer, and F. Vachier // *International Astronomical Union Circular*. – 2007. – Vol. 8817.
- 48.Marchis F. A dynamical solution of the triple asteroid system (45) Eugenia / F. Marchis, V. Lainey, P. Descamps, J. Berthier, M. Van Dam, I. de Pater, B. Macomber, M. Baek, D. Le Mignant, H.B. Hammel, M. Showalter, F. Vachier // *Icarus*. – 2010. – Vol. 210. – P. 635-643.
- 49.Marsden B. G. Satellites of Saturn and Pluto / Marsden B. G. // *International Astronomical Union Circular*. – 1986. – Vol. 4157.

50. Martyusheva A. SOLAR RADIATION PRESSURE EFFECTS ON ASTEROID MOTIONS, INCLUDING NEAR-EARTH OBJECTS / Martyusheva, A., Petrov, N., Polyakhova, E.N. // Messenger of St. Petersburg University. – 2005. – Vol. 2 . – Issue 60. – P. 135.
51. McMahon J. H. The Discovery of a Satellite of an Asteroid / McMahon James H. // The Minor Planet Bulletin. – 1978. – Vol. 6. – P. 14-17.
52. Merline W. J. S/1998 (45) 1 / W. J. Merline, L. M. Close, C. Dumas, C. R. Chapman, F. Roddier, F. Menard, D. C. Slater, G. Duvert, C. Shelton, and T. Morgan // International Astronomical Union Circular. – 1999. – IAUC 7129.
53. Murray C.D. in: Solar System dynamics / Cart D. Murray, Stanley F. Dermot // Cambridge U Press. – 2010.
54. Masiero J. R. Main belt asteroids with WISE/NEOWISE. I. Preliminary albedos and diameters / Joseph R. Masiero, A. K. Mainzer, T. Grav, J. M. Bauer, R. M. Cutri, J. Dailey, P. R. M. Eisenhardt, R. S. McMillan, T. B. Spahr, M. F. Skrutskie, D. Tholen, R. G. Walker, E. L. Wright, E. DeBaun, D. Elsbury, T. Gautier, S. Gomillion, and A. Wilkins // The Astrophysical Journal. – 2011. – Vol. 741. – P. 68-87.
55. Nolan M. C. Planetary radar imaging of binary asteroids, Binary Asteroid Dynamics Workshop / Michael C. Nolan, Ellen S. Howell, Lance A. M. Benner, Steven J. Ostro, Jon D. Giorgini, Chris Magri, Jean-Luc Margot, Michael Shepard // – 2008.
56. Nolan M. C. (153591) 2001 SN_263 / Nolan M. C., et al. // Central Bureau Electronic Telegrams. – 2008. – Vol. 1254.
57. Noll K. S. 2003 QW_111 / K. S. Noll, W. M. Grundy, D. C. Stephens, and H. F. Levison // International Astronomical Union Circular. – 2006. – Vol. 8745.
58. Ostro S. J. Radar imaging of binary near-Earth asteroid (66391) 1999 KW4 / Steven J. Ostro, Jean-Luc Margot, Lance A. M. Benner, Jon D. Giorgini, Daniel J. Scheeres, Eugene G. Fahnestock, Stephen B. Broschart, Julie Bellerose, Michael C. Nolan, Christopher Magri, Petr Pravec, Petr Scheirich, Randy Rose,

- Raymond F. Jurgens, Eric M. De Jong, Shigeru Suzuki // *Science*. – 2006. – Vol. 314. – P. 1276-1280.
59. Polishook D. Spin Axes and Shape Models of Asteroid Pairs: Fingerprints of YORP and a Path to the Density of Rubble Piles / Polishook David // *Icarus*. – 2014. – Vol. 241. – P. 79-96.
60. Rabinowitz D. L. Photometric observations constraining the size, shape, and albedo of 2003 EL61, a rapidly rotating, Pluto-sized object in the Kuiper Belt / D. L. Rabinowitz, K. Barkume, M. E. Brown, H. Roe, M. Schwartz, S. Tourtellotte, and C. Trujillo // *The Astronomical Journal*. – 2006. . – Vol. 639. – P. 1238-1251.
61. Ragozzine D. Orbits and masses of the satellites of the dwarf planet Haumea (2003 EL61) / D. Ragozzine and M. E. Brown // *The Astronomical Journal*. – 2009. – Vol. 137. – P. 4766-4776.
62. Savanevich V. The program of automated detection of faint celestial bodies CoLiTec / Savanevich V., Bryukhovetskiy A., Kozhuhov A., Dickov E., Vlasenko V. // *Space Science and Technology*. – 2012. – Vol. 18. – Issue 1. – P. 39.
63. Seefelder W. in: *Lunar Transfer Orbits Utilizing Solar Perturbations and Ballistic Capture*, Herbert Utz Verlag, Issenschaft Munchen. – 2012.
64. Showalter M. R. New satellite of (134340) Pluto: S/2011 (134340) 1 / M. R. Showalter, D. P. Hamilton, S. A. Stern, H. A. Weaver, A. J. Steffl, and L. A. Young // *Central Bureau Electronic Telegrams*. – 2011. – Vol. 2769.
65. Showalter M. R. New satellite of (134340) Pluto: S/2012 (134340) 1 / M. R. Showalter, H. A. Weaver, S. A. Stern, A. J. Steffl, M. W. Buie, W. J. Merline, M. J. Mutchler, R. Soummer, and H. B. Throop // *International Astronomical Union Circular*. – 2012. – Vol. 9253.
66. Showalter M. R. Resonant interactions and chaotic rotation of Pluto's small moons / M. R. Showalter & D. P. Hamilton // *Nature*. – 2015. – Vol. 522. . – P. 45-49.
67. Smith J. C. 1978 P 1 / J. C. Smith // *International Astronomical Union Circular*. – 1978. – Vol. 3241.

68. Steffl A.J. A search for Vulcanoids with the STEREO Heliospheric Imager / A.J. Steffl, N.J. Cunningham, A.B. Shinn, D.D. Durda, S.A. Stern // *Icarus*. – 2013. – Vol. 223. – Issue 1. – P. 48-56.
69. **S15c**: Stern S. A. The Pluto system: Initial results from its exploration by New Horizons / S. A. Stern, F. Bagenal, K. Ennico, G. R. Gladstone, W. M. Grundy, W. B. McKinnon, J. M. Moore // *Science*. – 2015. – Vol. 350. – Issue 6258.
70. Talbert T. Last of Pluto's Moons – Mysterious Kerberos – Revealed by New Horizons / Talbert T. // NASA. [сайт] – URL: [<https://www.nasa.gov/feature/last-of-pluto-s-moons-mysterious-kerberos-revealed-by-new-horizons>] (2015).
71. Taylor P. A. Tidal end states of binary asteroid systems with a nonspherical component / Taylor Patrick A., Margot Jean-Luc // *Icarus*. – 2014. – Vol. 229. – P. 418-422.
72. Troianskyi V.V. Method for calculating orbits of near-Earth asteroids observed with telescope OMT-800 / V.V. Troianskyi, O.A. Bazyey, V.I. Kashuba, V.V. Zhukov, S.O. Korzhavin // *Odessa Astronomical Publications*. – 2014. – Vol. 27(2). – P. 154-155.
73. Troianskyi V.V. Determination of the small Solar system bodies orbital elements from astrometric observations with OMT-800 telescope / V.V. Troianskyi, O.A. Bazyey, V.I. Kashuba, V.V. Zhukov // *Third Gaia Fun SSO "Gaia Follow-up Network for Solar System Objects"*. – Paris: IMCCE. – 2015. – Vol. 3. – P. 127-130.
74. Troianskyi V.V. The impact of the non-sphericity of the gravitational field of the asteroid on the evolution of the orbits of its satellites / V.V. Troianskyi // *Odessa Astronomical Publications*. – 2015. – Vol. 28. – Issue 2. – P. 299-303.
75. Troianskyi V.V. Disintegration's condition of binary and multiple asteroids under the action of tidal forces Major Solar system planets / Troianskyi V.V., Radchenko K.O., Bazyey O.A. // *Astronomical School's Report*. – 2015. – Vol. 11(2). – P. 145-156.
76. Troianskyi V.V. Resonances in the asteroids systems / V.V. Troianskyi // *Odessa Astronomical Publications*. – 2016. – Vol. 29. – P. 221-223.

77. Troianskyi V.V. The Solar-radiation pressure effects on the orbital evolution of asteroid moons / V.V. Troianskyi, O.A. Bazyey // *Odessa Astronomical Publications*. – 2015. – Vol. 28. – Issue 1. – P. 76-77.
78. Troianskyi V.V. Dynamics of the asteroid rings (10199) Chariklo / Troianskyi V.V., Bazyey O.A. // *Astronomical School's Report*. – 2016. – Vol. 12(2). – P. 122-124.
79. Väisälä Y. Eine einfache Methode der Bahnbestimmung / Väisälä Y. // *Ann. Acad. Scientiarum Fennicae, Ser. A, t. LII*. – 1940. – Vol. 2. – P. 5.
80. Veillet C. Astrometry and Photometry of the binary TNO 1998 WW31 / Veillet Christian // *HST Proposal*. – 2000. – Cycle 9. – ID #9259.
81. Veverka J. Dactyl: Galileo observations of Ida's satellite / J. Veverka, P.C. Thomas, P. Helfenstein, P. Lee, A. Harch, S. Calvo, C. Chapman, M.J.S. Belton, K. Klaasen, T.V. Johnson, M. Davies // *Icarus*. – 1996. – Vol. 120. – Issue 1. – P. 200.
82. Walsh K. J. Rotational breakup as the origin of small binary asteroids / Walsh K. J. // *Nature*. – 2008. – Vol. 454. – Issue 7201. – P. 188.
83. Warner B. D. The Asteroid Lightcurve Data Base (LCDB) / Warner B. D., A. W. Harris and P. Pravec // [сайт] – URL: [<http://www.minorplanet.info/lightcurvedatabase.html>] (2014).
84. Weidenschilling S. J. Hektor - Nature and origin of a binary asteroid / Weidenschilling S. J. // *Icarus*. – 1980. – Vol. 44. – P. 807-809.
85. Winter O. / Winter O., Araujo R., Sfair R. // *IAU General Assembly*. – 2015. – Vol. 29. – P. 2251028.
86. Yu Jiang Dynamical configurations of celestial systems comprised of multiple irregular bodies / Yu Jiang, Yun Zhang, Hexi Baoyin, Junfeng Li // *Astrophys Space Sci*. – 2016. – Vol. 361. – Article 306.
87. BINARY AND TERNARY NEAR-EARTH ASTEROIDS DETECTED BY RADAR [Электронный ресурс] - URL: <https://echo.jpl.nasa.gov/~lance/binary.neas.html> (01.05.2017).

88. IAU International Astronomical Union [сайт] - URL: <https://www.iau.org/news/pressreleases/detail/iau0603/> (01.05.2017).
89. NASA [сайт] - URL: <https://www.nasa.gov/> (01.05.2017).
90. IAU International Astronomical Union [сайт] - URL: <https://www.iau.org/> (01.05.2017).
91. IAU Minor Planet Center [сайт] - URL: www.minorplanetcenter.net (01.05.2017).
92. IAU Minor Planet Center [сайт] - URL: http://www.minorplanetcenter.net/iau/ECS/MPCArchive/MPCArchive_TBL.html (01.05.2017).
93. University of Turku [сайт] - URL: <http://www.astro.utu.fi/TAS/TuorlaObs/isoheikkila/index.eng.html> (01.05.2017).
94. Turun yliopisto University of Turku [сайт] - URL: <http://www.utu.fi/fi/Sivut/home.aspx> (01.05.2017).
95. The Pan-STARRS1 data archive home page [сайт] - URL: <http://panstarrs.stsci.edu/> (01.05.2017).
96. NASA Jet Propulsion Laboratory [сайт] - URL: <https://www.jpl.nasa.gov/> (01.05.2017).
97. Johnston's Archive [Электронный ресурс] - URL: <http://www.johnstonsarchive.net/astro/astmoons/am-10199.html> (01.05.2017).
98. Canada-France-Hawaii Telescope [сайт] - URL: <http://www.cfht.hawaii.edu/> (01.05.2017).
99. The Very Large Telescope Interferometer [сайт] - URL: <http://www.eso.org/sci/facilities/paranal/telescopes/vlti.html> (01.05.2017).
100. Goldstone Deep Space Communications Complex - NASA [сайт] - URL: <http://www.gdscc.nasa.gov/> (01.05.2017).
101. W. M. Keck Observatory [сайт] - URL: <http://www.keckobservatory.org/> (01.05.2017).
102. New Horizons NASA's Mission to Pluto [сайт] - URL: <http://pluto.jhuapl.edu/Multimedia/Images/index.php> (01.05.2017).

103. Planetary Fact Sheet - Metric [Электронный ресурс] - URL: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/> (01.05.2017).
104. Asteroid Lightcurve Photometry Database (ALCDEF) [Электронный ресурс] - URL: <http://alcdef.org/> (01.05.2017).
105. Johnston's Archive [Электронный ресурс] - URL: <http://www.johnstonsarchive.net/> (01.05.2017).

ДОДАТКИ

Додаток А.

Розподіл подвійних і кратних тіл по групам та сімействам.

Наведено деякі Кеплерові елементи орбіти [96],

що характеризують приналежність до групи або сімейства

Астероїди які наближуються до Землі:	a (а.о.)	e	q (а.о.)	Q (а.о.)	Група, сімейство:
(1862) Apollo	1.47004342241	0.559959378	0.646878822	2.2932080224	Apollo
(1866) Sisyphus	1.893818726	0.538293967	0.874387531	2.913249921	Apollo
(3671) Dionysus and S/1997 (3671) 1	1.833500481	0.772242011	0.417594382	3.249406580	Amor
(5143) Heracles	1.833500481	0.772242011	0.417594382	3.249406580	Apollo
(5381) Sekhmet	0.947461319	0.29623718	0.66678805	1.228134584	Aten
(5646) 1990 TR	2.142140459	0.437049083	1.20591994	3.078360981	Amor
(7088) Ishtar	1.980767174	0.390732639	1.20681679	2.754717558	Amor
(7888) 1993 UC	2.436119943	0.664200014	0.818049043	4.054190842	Apollo
(31345) 1998 PG	2.014955130	0.391553520	1.225992357	2.803917903	Amor
(35107) 1991 VH and S/2008 (35107) 1	1.137290734	0.144253548	0.973232511	1.301348958	Apollo
(53110) 1999 AR7	1.644494591	0.214430826	1.291864257	1.9971249248	Amor
(65803) Didymos	1.644364375	0.383635122	1.013528448	2.275200302	Amor
(66063) 1998 RO1	0.990918301	0.720119477	0.277338733	1.704497870	Aten
(66391) 1999 KW4	0.642291859	0.688460238	0.200099453	1.084484265	Aten
(69230) Hermes	1.655109415	0.624135010	0.622097684	2.688121147	Apollo
(85938) 1999 DJ4	1.853094926	0.483304518	0.957485776	2.748704076	Apollo
(88710) 2001 SL9	1.061357590	0.270037573	0.774751163	1.347964018	Apollo
(136617) 1994 CC	1.637780212	0.417226647	0.954454666	2.321105759	Apollo
(136993) 1998 ST49	2.310275758	0.593080131	0.940097109	3.680454407	Apollo
(137170) 1999 HF1	0.819109010	0.462429639	0.440328726	1.197889295	Aten
(138095) 2000 DK79	1.776509203	0.414352113	1.040408861	2.512609544	Aten
(153591) 2001 SN263	1.986951527	0.478406719	1.036380566	2.937522489	Amor
(153958) 2002 AM31	1.703044974	0.451675264	0.933821686	2.472268263	Apollo
(162000) 1990 OS	1.678430687	0.462390415	0.902340425	2.454520949	Apollo
(162483) 2000 PJ5	0.872675342	0.37362454	0.54662242	1.198728267	Aten
(163693) Atira	0.7410827428	0.32216064	0.502335056	0.97983043	Atira
(164121) 2003 YT1	1.109909552	0.291915233	0.785910047	1.433909056	Apollo
(175706) 1996 FG3	1.05411509537	0.349930304	0.685248279	1.42298191144	Apollo
(185851) 2000 DP107 and S/2000 (2000 DP107) 1	1.365489387	0.376719239	0.851083264	1.879895510	Apollo
(190208) 2006 AQ	2.054002524	0.486860008	1.0539907	3.054014348	Amor
(226514) 2003 UX4	1.0951021658	0.615858212	0.420674504	1.7695298273	Apollo
(276049) 2002 CE26	2.234038734	0.559245640	0.984662312	3.483415156	Apollo
(285263) 1998 QE2	2.423106551	0.571515197	1.038264332	3.807948769	Amor
(311066) 2004 DC	1.633837569	0.399466431	0.981174307	2.286500832	Apollo
(348400) 2005 JF21	2.2230135522	0.53621043	1.031010499	3.415016605	Amor
(357439) 2004 BL86	1.5022021268	0.403073161	0.896704767	2.107699486	Apollo
(363027) 1998 ST27	0.819381537	0.530011092	0.385100234	1.253662841	Aten
(363067) 2000 CO101	1.076352695	0.090022725	0.979456493	1.173248898	Apollo
(363599) 2004 FG11	1.587694842	0.72425854	0.43779329	2.737596389	Apollo
(374851) 2006 VV2	2.386467443	0.605429626	0.941629351	3.83130554	Apollo
(385186) 1994 AW1	1.104781278	0.075460167	1.021414298	1.188148259	Amor
(399307) 1991 RJ2	2.2083582416	0.428903368	1.26118595	3.1555305285	Amor
(399774) 2005 NB7	2.044466396	0.517082099	0.987309420	3.101623372	Apollo

(410777) 2009 FD	1.1631569199	0.492921576	0.589811778	1.7365020618	<i>Apollo</i>
(450894) 2008 BT18	2.222999067	0.593195991	0.904324933	3.541673202	<i>Apollo</i>
(452561) 2005 AB	3.21736237	0.655379534	1.108768919	5.32595582	<i>Amor</i>
(461852) 2006 GY2	1.857632792	0.496099857	0.936061429	2.779204155	<i>Apollo</i>
(481532) 2007 LE	1.838829142	0.516738856	0.888634674	2.789023610	<i>Apollo</i>
1994 CJ1	1.4904278855	0.325346541	1.005522329	1.975333442	<i>Apollo</i>
1994 XD	2.347124733	0.733373708	0.625805165	4.068444300	<i>Apollo</i>
2000 UG11	1.928364818	0.572821161	0.823756645	3.032972991	<i>Apollo</i>
2002 BM26	1.832461461	0.444462980	1.018000178	2.646922743	<i>Amor</i>
2002 KK8	1.953258318	0.466308688	1.042436995	2.864079642	<i>Amor</i>
2003 SS84	1.930486345	0.570693888	0.82876959	3.032203103	<i>Apollo</i>
2005 YQ96	0.743746462	0.33325777	0.49588717	0.99160575	<i>Aten</i>
2007 DT103	2.2058489	0.57557287	0.93622211	3.4754756	<i>Apollo</i>
2008 DG17	1.837644959	0.44947160	1.01167574	2.663614175	<i>Amor</i>
2013 WT44	2.25956237	0.56835774	0.975322610	3.54380214	<i>Apollo</i>
2014 WZ120	2.2136843	0.63862784	0.79996387	3.6274047	<i>Apollo</i>
2014 YB35	1.8747478	0.4829239	0.9693873	2.780108	<i>Apollo</i>
2015 TD144	1.988	0.7582	0.48086	3.496	<i>Apollo</i>
Марс-кроссери:	a (a.e.)	e	q (a.e.)	Q (a.e.)	Група, сімейство:
(1139) Atami	1.947630389	0.255501191	1.45000850	2.445252273	
(1727) Mette	1.854222431	0.101729224	1.66559382	2.042851040	<i>Hungaria</i>
(2044) Wirt	2.380343808	0.343768410	1.56205680	3.198630814	
(2449) Kenos	1.909047502	0.168238351	1.587872499	2.2302225049	
(2577) Litva, S/2012 (2577) 1 and second satellite	1.904439611	0.137937478	1.64174601	2.167133209	<i>Hungaria</i>
(3873) Roddy	1.892048452	0.133696579	1.63908805	2.145008858	
(5261) Eureka	1.52353322	0.064859679	1.424717344	1.6223490956	<i>Mars Trojan</i>
(5407) 1992 AX	1.838397297	0.277565693	1.32812128	2.348673318	
(7369) Gavrilin	2.370459627	0.318396091	1.61571455	3.125204706	
(8373) Stephengould	3.280218619	0.554698714	1.46068557	5.099751669	<i>Hungaria</i>
(12008) Kandrup	1.996504957	0.31620832	1.36519348	2.627816435	
(15700) 1987 QD	2.208448699	0.315943606	1.51070345	2.906193944	
(16635) 1993 QO	2.2983160948	0.284235277	1.64505358	2.951578606	
(26074) Carlwirtz	1.811005685	0.088958120	1.64990202	1.972109346	<i>Hungaria</i>
(26471) Tracybecker	1.917977412	0.154476722	1.62169455	2.214260275	<i>Hungaria</i>
(32039) 2000 JO23	2.222813496	0.282754209	1.59430362	2.851323368	
(34706) 2001 OP83	2.253209814	0.383273282	1.38961469	3.116804935	
(51356) 2000 RY76	1.811797578	0.11163368	1.60953994	2.014055215	<i>Hungaria</i>
(53432) 1999 UT55	1.871650083	0.11587349	1.65477546	2.088524707	<i>Hungaria</i>
(99913) 1997 CZ5	2.293957933	0.397212393	1.38276941	3.205146452	
(114319) 2002 XD58	2.256121969	0.27521764	1.63519740	2.877046538	
(218144) 2002 RL66	2.305224311	0.34082360	1.51954947	3.090899156	
Головний пояс астероїдів:	a (a.o.)	e	q (a.o.)	Q (a.o.)	Група, сімейство:
(22) Kalliope and Linus	2.910478163	0.099848778	2.61987048	3.201085850	
(41) Daphne and S/2008 (41) 1	2.760712646	0.275135943	2.001141370	3.520283922	
(45) Eugenia, Petit-Prince and S/2004 (45) 1	2.720342369	0.083185113	2.49405038	2.946634357	
(87) Sylvia, Romulus and Remus	3.481808398	0.091145156	3.16445843	3.799158367	
(90) Antiope and S/2000 (90) 1	3.154487052	0.163458400	2.63885965	3.670114457	
(93) Minerva, Aegis and Gorgoneion	2.754124319	0.141224590	2.36517424	3.143074397	
(107) Camilla and S/2001 (107) 1	3.487326707	0.066773541	3.25446556	3.720187859	
(121) Hermione and S/2002 (121) 1	3.450115270	0.134268194	2.98687453	3.913356016	
(130) Elektra, S/2003 (130)	3.123238626	0.208453864	2.47218747	3.774289787	

1 and S/2014 (130) 1					
(216) Kleopatra, Alexhelios and Cleoselene	2.796815213	0.249175002	2.099918776	3.493711650	
(243) Ida and Dactyl	2.862471602	0.041485093	2.74372170	2.981221504	
(283) Emma and S/2003 (283) 1	3.047100676	0.148445205	2.59477319	3.499428161	
(317) Roxane and S/2009 (317) 1	2.286745014	0.085547846	2.09111890	2.482371126	
(379) Huenna and S/2003 (379) 1	3.136858904	0.186373517	2.55223148	3.721486330	
(702) Alauda and Pichi unem	3.191997731	0.020054628	3.12798341	3.256012057	
(762) Pulcova	3.156222142	0.102891933	2.83147234	3.480971941	
(809) Lundia	2.282385746	0.193127550	1.84159418	2.723177314	
(854) Frostia	2.368511967	0.173568755	1.95741230	2.779611639	
(939) Isberga	2.2467449376	0.177463926	1.848028761	2.6454611141	
(1052) Belgica	2.235833262	0.143528228	1.91492808	2.556738448	
(1089) Tama	2.213775091	0.127502720	1.931512745	2.496037438	
(1313) Berna	2.655728252	0.208458632	2.10211877	3.209337729	
(1333) Cevenola	2.632135918	0.134022850	2.27936956	2.984902276	
(1338) Duponta	2.263503125	0.112432410	2.009012013	2.517994237	
(1453) Fennia	1.896996724	0.028285674	1.843338894	1.950654555	Hungaria
(1509) Esclangona and S/2003 (1509) 1	1.866345859	0.032215871	1.80621990	1.926471816	Hungaria
(1717) Arlon	2.195947594	0.128976235	1.912722542	2.479172646	
(1830) Pogson	2.188591450	0.055932424	2.06617823	2.311004674	
(2006) Polonskaya	2.323905449	0.193374097	1.87452233	2.773288566	
(2047) Smetana	1.872013158	0.003427671	1.86559651	1.878429803	
(2121) Sevastopol	2.183210944	0.178710897	1.79304736	2.573374530	
(2131) Mayall	1.887274522	0.111037884	1.67771555	2.096833491	Hungaria
(2242) Balaton	2.2079974764	0.117437977	1.94869472	2.467300233	
(2343) Siding Spring	2.3344250913	0.255503133	1.73797217	2.930878016	
(2478) Tokai	2.225290189	0.068326263	2.073244426	2.377335952	
(2486) Metsahovi	2.268086843	0.080224861	2.08612989	2.450043795	
(2535) Hameenlinna	2.239903232	0.079991841	2.06072925	2.4190772143	
(2623) Zech	2.254786313	0.234039084	1.72707819	2.7824944368	
(2691) Sersic	2.7824944368	0.112147656	1.99261085	2.495997791	
(2754) Efimov	2.228642262	0.232298177	1.71093273	2.746351797	
(2815) Soma	2.232596959	0.169407399	1.85437852	2.610815403	
(2825) Crosby	2.245836727	0.173473099	1.85624447	2.6354289833	
(3034) Climenhaga	2.325534157	0.209447286	1.83845734	2.812610974	
(3073) Kursk	2.242451547	0.136546023	1.93625371	2.548649389	
(3169) Ostro	1.891834941	0.066894323	1.76528192	2.018387960	Hungaria
(3309) Brorfelde	1.817472098	0.053273893	1.72064828	1.914295912	Hungaria
(3433) Fehrenbach	2.393726861	0.186430957	1.94746207	2.83999165	
(3673) Levy	2.345440167	0.184083409	1.91368354	2.777196790	
(3703) Volkonskaya	2.331384004	0.134376452	2.01810089	2.644667116	
(3749) Balam, S/2002 (3749) 1 and third component	2.236702937	0.109273190	1.99229127	2.481114602	
(3782) Celle	2.416557896	0.093487405	2.19064017	2.642475621	
(3792) Preston	2.2918070306	0.220478796	1.78651218	2.797101884	
(3841) Diccico	2.273965163	0.159655797	1.91091344	2.637016883	
(3868) Mendoza	2.333797095	0.098212416	2.10458924	2.563004946	
(3905) Doppler	2.559763440	0.257997455	1.89935099	3.220175893	
(3951) Zichichi	2.339662074	0.173971564	1.93262740	2.746696744	
(3982) Kastel	2.258729314	0.219375851	1.76321865	2.754239980	
(4029) Bridges	2.525421064	0.130959059	2.19469430	2.856147829	
(4272) Entsuji	2.3680705319	0.249963265	1.77613989	2.960001175	
(4296) Van Woerkom	2.2487558164	0.165864138	1.87576787	2.6217437606	
(4383) Suruga	2.424516768	0.063722790	2.27001980	2.579013741	

(4440) Tchantches	1.921293145	0.077206165	1.77295747	2.069628819	Hungaria
(4492) Debussy	2.765983837	0.180358464	2.26711524	3.264852434	
(4514) Vilen	2.344769957	0.152686767	1.98675461	2.702785302	
(4541) Mizuno	2.37977972	0.02019258	2.33172583	2.427833611	
(4607) Seilandfarm	2.263885788	0.019025892	2.22081334	2.306958234	
(4666) Dietz	2.340531439	0.233340874	1.79438979	2.886673091	
(4674) Pauling and S/2004 (4674) 1	1.858686166	0.070367676	1.72789474	1.989477592	Hungaria
(4765) Wasserburg	1.945408318	0.060073422	1.82854098	2.062275652	Hungaria
(4786) Tatianina	2.358201605	0.193657533	1.90151810	2.814885110	
(4868) Knushevia	1.960501539	0.068090629	1.82677757	2.094225512	
(4951) Iwamoto	2.256428848	0.166530009	1.88066573	2.632191963	
(5112) Kusaji	2.174806534	0.130096161	1.89187255	2.457740516	
(5425) Vojtech	2.454054108	0.13464616	2.12362515	2.78448307	
(5426) Sharp	1.9551570863	0.116771007	1.72685143	2.1834627473	
(5474) Gingasen	2.382913175	0.067449239	2.22218750	2.543638855	
(5477) Holmes	1.917452812	0.075236158	1.77319103	2.061714594	Hungaria
(5481) Kiuchi	2.339257265	0.063265229	2.19126362	2.487250910	
(5536) Honeycutt	2.2491770064	0.094363496	2.0369368	2.461417212	
(5674) Wolff	2.3573702944	0.166350317	1.965221	2.749519589	
(5872) Sugano	2.249125073	0.133546107	1.94876318	2.549486971	
(5899) Jedicke	1.928720407	0.116660149	1.70371560	2.153725217	Hungaria
(5905) Johnson	1.910207673	0.071733727	1.77318136	2.047233990	Hungaria
(6016) 1991 PA11	2.332394352	0.215219421	1.83041779	2.8343709132	
(6084) Bascom	2.312742949	0.235487303	1.76812135	2.857364548	
(6186) Zenon	2.3791444008	0.184198265	1.94091013	2.817378671	
(6244) Okamoto	2.159377811	0.152704068	1.82963204	2.489123587	
(6265) 1985 TW3	2.165872171	0.193058849	1.74773138	2.584012959	
(6369) 1983 UC	2.293215745	0.142830617	1.96567432	2.620757165	
(6615) Plutarchos	2.169992956	0.126321037	1.89587719	2.444108717	
(6708) Bobbievaile	2.444865529	0.181908230	2.00012437	2.889606691	
(7187) Isobe	1.937433295	0.086375239	1.77008703	2.104779560	
(7225) Huntress	2.340644707	0.203256012	1.86489460	2.816394817	
(7958) Leakey	1.877005940	0.077056381	1.73237065	2.021641225	Hungaria
(8026) Johnmckay	1.925339521	0.07492829	1.78107713	2.069601917	Hungaria
(8116) Jeanperrin	2.249749165	0.158303423	1.89360617	2.605892159	
(8306) Shoko	2.242117427	0.219825063	1.74924382	2.734991031	
(8474) Rettig	2.2243996779	0.171476073	1.84296836	2.6058309986	
(9069) Hovland	1.913197745	0.11820467	1.68704883	2.139346661	Hungaria
(9260) Edwardolson	2.289345475	0.230276951	1.76216198	2.816528971	
(9617) Grahamchapman	2.224704823	0.113042943	1.973217643	2.476192003	
(9783) Tensho-kan	2.670299051	0.104091294	2.39234417	2.948253935	
(10123) Fideoja	2.269309849	0.206295996	1.80116031	2.737459385	
(10208) Germanicus	2.235408893	0.201491830	1.78499227	2.685825522	
(11217) 1999 JC4	1.943872983	0.069681447	1.80842110	2.079324866	
(11264) Claudiomaccone	2.577566405	0.233759053	1.97503692	3.180095887	
(12326) Shirasaki	2.2630859193	0.187820509	1.83803197	2.6881398678	
(13123) Tyson	2.360486365	0.270703491	1.72149447	2.999478265	
(15268) Wendelinefroger	2.365111709	0.235088725	1.80910061	2.921122805	
(15430) 1998 UR31	2.222085701	0.170166932	1.84396019	2.600211209	
(15822) 1994 TV15	1.948072364	0.079700666	1.79280970	2.103335028	
(16525) Shumarinaiko	2.399529197	0.138775564	2.06653318	2.732525214	
(17246) Christophedumas and S/2004 (17246) 1	2.838968952	0.021176578	2.77884931	2.899088599	
(17260) Kusnirak	2.204534248	0.183286451	1.80047299	2.608595506	
(18890) 2000 EV26	1.9170260852	0.073965409	1.77523247	2.0588197042	
(20325) Julianoeoy	2.378629142	0.076478504	2.19671514	2.560543142	
(21436) Chaoyichi	2.186466611	0.085062306	2.00048072	2.372452503	
(22899) Alconrad and S/2003 (22899) 1	2.844299130	0.081280706	2.61311249	3.075485771	

(24465) 2000 SX155	1.9253595763	0.085087494	1.76153555	2.0891835978	
(26416) 1999 XM84	1.917977412	0.154476722	1.62169455	2.214260275	
(27568) 2000 PT6	1.963505051	0.027560328	1.90939021	2.017619894	<i>Hungaria</i>
(31450) 1999 CU9	2.393174608	0.26751947	1.7529538	3.03339541	
(32008) Adriangalad	2.192129962	0.192345615	1.77048338	2.613776547	
(43008) 1999 UD31	2.348350145	0.18885934	1.90484229	2.791858003	
(44620) 1999 RS43	2.176320153	0.164202154	1.8189637	2.53367661	
(46829) McMahon	2.401611438	0.179730048	1.9699697	2.833253177	
(52316) Daveslater	1.896824832	0.06513823	1.77326902	2.020380643	
(69406) 1995 SX48	1.843932099	0.022388577	1.80264908	1.885215115	
(76818) 2000 RG79	1.929916718	0.095761448	1.745105099	2.114728337	
(79472) Chiorny	1.962122802	0.08009309	1.80497032	2.119275289	<i>Hungaria</i>
(80218) 1999 VO123	2.218387762	0.027163402	2.1581288	2.278646719	
Троянські астероїди Юпітера:	<i>a</i> (a.o.)	<i>e</i>	<i>q</i> (a.o.)	<i>Q</i> (a.o.)	Група, сімейство:
(617) Patroclus and Menoetius	5.217303510	0.139513679	4.48941830	5.945188718	L5
(624) Hektor and S/2006 (624) 1	5.249788662	0.024404703	3.377908197	5.12166913	L4
(17365) 1978 VF11	5.26758981	0.07894338	4.85174847	5.68343114	L5
(29314) Eurydamas	5.27991384	0.072609396	4.89654248	5.66328519	L5
Транснептунові об'єкти:	<i>a</i> (a.o.)	<i>e</i>	<i>q</i> (a.o.)	<i>Q</i> (a.o.)	Група, сімейство:
(134340) Pluto, Charon, Nix, Hydra, Kerberos and Styx	39.44506973	0.250248713	29.57399177	49.31614768	<i>Plutino</i>
(10199) Chariklo and ring system	15.754190	0.1715941	13.050864	18.457515	<i>Centaur</i>
(26308) 1998 SM165 and S/2001 (26308) 1	47.675	0.369454	30.0614	65.289	<i>1:2 resonance</i>
(38628) Huya	39.4127	0.276051	28.53278	50.2927	<i>Plutino</i>
(42355) Typhon and Echidna	38.10752321	0.540154039	17.52359062	58.6914558	<i>Centaur</i>
(47171) 1999 TC36, S/2001 (47171) 1 and third component	39.4715	0.225902	30.55480	48.3882	<i>Plutino</i>
(48639) 1995 TL8	52.560	0.23597	40.1573	64.962	<i>SDO, extended</i>
(50000) Quaoar and Weywot	43.2191	0.035127	41.7009	44.7372	<i>Cubewano</i>
(55637) 2002 UX25	42.7846	0.144846	36.5874	48.9818	<i>Cubewano</i>
(58534) Logos and Zoe	45.443	0.12372	39.8212	51.065	<i>Cubewano</i>
(60458) 2000 CM114	59.923	0.40693	35.539	84.308	<i>SDO</i>
(60621) 2000 FE8	55.580	0.40571	33.0304	78.129	<i>2:5 resonance</i>
(65489) Ceto and Phorcys	101.903	0.825449	17.78733	186.019	<i>Centaur</i>
(66652) Borasisi and Pabu	43.616	0.08462	39.9254	47.307	<i>Cubewano</i>
(79360) Sila-Nunam	44.1329	0.015946	43.4292	44.8367	<i>Cubewano</i>
(80806) 2000 CM105	42.4032	0.06685	39.568	45.2380	<i>Cubewano</i>
(82075) 2000 YW134	58.340	0.29405	41.1853	75.495	<i>3:8 resonance</i>
(82157) 2001 FM185	38.718	0.05811	36.468	40.968	<i>Cubewano</i>
(88611) Teharonhiawako and Sawiskera	43.894	0.029879	42.583	45.206	<i>Cubewano</i>
(90482) Orcus and Vanth	39.4386	0.219161	30.7952	48.0820	<i>Plutino</i>
(119067) 2001 KP76	43.422	0.18742	35.284	51.559	<i>4:7 resonance</i>
(119979) 2002 WC19	48.18208731	0.265488923	35.39027683	60.9738978	<i>1:2 resonance</i>
(120347) Salacia and Actaea	41.9621	0.106288	37.5020	46.4221	<i>Cubewano</i>

(123509) 2000 WK183	44.619	0.04977	42.3979	46.839	<i>Cubewano</i>
(134860) 2000 OJ67	42.71279935	0.019547985	41.87785018	43.54774852	<i>Cubewano</i>
(136108) Haumea, Hi'iaka and Namaka	43.1660	0.192457	34.8584	51.4736	<i>SDO, Haumea class</i>
(136199) Eris and Dysnomia	67.8363	0.439647	38.0123	97.6603	<i>SDO, scattered disk</i>
(136472) Makemake and S/2015 (136472) 1	45.7615	0.154015	38.7136	52.8095	<i>Cubewano</i>
(139775) 2001 QG298	39.3003	0.19179	31.76273	46.8378	<i>Plutino</i>
(148780) Altjira	44.4009	0.05814	41.819	46.9826	<i>Cubewano</i>
(160091) 2000 OL67	44.992	0.10726	40.166	49.818	<i>Cubewano</i>
(160256) 2002 PD149	42.903	0.06433	40.143	45.662	<i>Cubewano</i>
(174567) Varda and Ilmare	45.63423503	0.141676948	39.1689159	52.09955415	<i>Cubewano</i>
(182933) 2002 GZ31	50.378	0.23863	38.3564	62.399	<i>SDO, extended</i>
(208996) 2003 AZ84	39.6805	0.174435	32.7588	46.6022	<i>Plutino</i>
(225088) 2007 OR10	66.9901	0.506639	33.0503	100.9299	<i>3:10 resonance</i>
(229762) 2007 UK126	74.158	0.49374	37.5437	110.773	<i>SDO</i>
(275809) 2001 QY297	43.6820	0.08216	40.0931	47.2709	<i>Cubewano</i>
(303712) 2005 PR21	44.045	0.10138	39.5799	48.510	<i>Cubewano</i>
(341520) Mors-Somnus	39.32345656	0.266606565	28.83956489	49.80734823	<i>Plutino</i>
(364171) 2006 JZ81	44.72253068	0.08117341	41.09225037	48.352811	<i>Cubewano</i>
(385446) Manwe and Thorondor	43.635	0.11541	38.599	48.671	<i>4:7 resonance</i>
(469420) 2001 XP254	42.564	0.22369	33.0426	52.085	<i>3:5 resonance</i>
(469505) 2003 FE128	47.949	0.25251	35.8412	60.057	<i>1:2 resonance</i>
(469514) 2003 QA91	44.257	0.07039	41.142	47.372	<i>Cubewano</i>
(469705) 2005 EF298	44.26224779	0.093682629	40.11564404	48.40885154	<i>Cubewano</i>
1998 WV24	39.123	0.03730	37.6634	40.582	<i>Cubewano</i>
1998 WW31 and S/2000 (1998 WW31) 1	44.81574668	0.082111381	41.13586383	48.49562952	<i>Cubewano</i>
1999 OJ4	37.9154	0.02647	36.9116	38.9192	<i>Cubewano</i>
1999 RT214	42.413	0.04394	40.5493	44.276	<i>Cubewano</i>
1999 RY214	45.224	0.18034	37.0684	53.380	<i>Cubewano</i>
1999 XY143	43.224	0.07770	39.866	46.582	<i>Cubewano</i>
2000 CF105	44.129	0.04217	42.2683	45.990	<i>Cubewano</i>
2000 CQ114	46.32297272	0.114538018	41.01723123	51.6287142	<i>Cubewano</i>
2000 QL251	47.695	0.21434	37.4717	57.918	<i>1:2 resonance</i>
2000 WT169	45.1211	0.00928	44.702	45.5397	<i>Cubewano</i>
2001 FL185	44.326	0.07955	40.8000	47.852	<i>Cubewano</i>
2001 QC298	46.191	0.12164	40.5721	51.809	<i>Cubewano</i>
2001 QQ322	43.930	0.05360	41.575	46.284	<i>Cubewano</i>
2001 QW322	43.846	0.0264	42.689	45.003	<i>Cubewano</i>
2001 RZ143	44.125	0.06517	41.2489	47.000	<i>Cubewano</i>
2001 XR254	43.21484292	0.028758088	41.97206668	44.45761915	<i>Cubewano</i>
2002 VF130	46.024	0.1173	40.627	51.421	<i>Cubewano</i>
2002 VT130	42.623	0.02952	41.364	43.881	<i>Cubewano</i>
2002 XH91	44.182	0.08389	40.476	47.888	<i>Cubewano</i>
2003 HG57	43.677	0.03179	42.288	45.065	<i>Cubewano</i>
2003 QR91	46.376	0.17962	38.045	54.706	<i>Cubewano</i>
2003 QY90	42.6265	0.05534	40.267	44.9855	<i>Cubewano</i>
2003 TJ58	44.64940517	0.090450198	40.61085764	48.68795269	<i>Cubewano</i>
2003 UN284	42.79318508	0.006737713	42.50485688	43.08151329	<i>Cubewano</i>
2003 WU188	44.410	0.04184	42.552	46.268	<i>Cubewano</i>
2003 YS179	43.863	0.02528	42.754	44.972	<i>Cubewano</i>

2003 YU179	47.111	0.16533	39.3217	54.900	Cubewano
2004 KH19	40.761	0.11906	35.908	45.614	
2004 PB108	45.025	0.10982	40.080	49.970	Cubewano
2005 EO304	45.734	0.0684	42.606	48.862	Cubewano
2005 GD187	43.253	0.01475	42.615	43.891	Cubewano
2005 VZ122	41.497	0.18241	33.927	49.067	5:8 resonance
2006 BR284	44.0983	0.04558	42.0884	46.1081	Cubewano
2006 CH69	46.04485471	0.042015228	44.11026965	47.97943976	Cubewano
2006 SF369	62.893	0.3779	39.128	86.658	SDO, 1:3 resonance
[hst5]	42.9	?	?	?	

Додаток В.

**Критична планетоцентрична відстань подвійних
і кратних астероїдних систем**

Астероїдна система	M_A (кг)	d (км)	$R_{\text{Меркурій}}$ (км)	$R_{\text{Венера}}$ (км)	$R_{\text{Земля}}$ (км)	$R_{\text{Марс}}$ (км)	$R_{\text{Юніпер}}$ (км)	$R_{\text{Сатурн}}$ (км)	$R_{\text{Уран}}$ (км)	$R_{\text{Нептун}}$ (км)
(22) Kalliope	8.1×10^{18} $\pm 2 \times 10^{17}$	1095 ± 11	47477 ± 90	116420 ± 221	124635 ± 237	59252 ± 113	850559 ± 1616	569019 ± 1081	304172 ± 578	321398 ± 610
(41) Daphne	6.31×10^{18} $\pm 1.1 \times 10^{17}$	443	20875 ± 122	51188 ± 299	54800 ± 320	26052 ± 152	373978 ± 2186	250189 ± 1463	133740 ± 782	141314 ± 826
(45) Eugenia, (beta)	5.63×10^{18} $\pm 3 \times 10^{14}$	1164.42 ± 0.03	56995 ± 3	139759 ± 6	149622 ± 6	71131 ± 3	1021078 ± 42	683095 ± 28	365152 ± 15	385831 ± 16
(45) Eugenia, (gamma)	5.63×10^{18} $\pm 3 \times 10^{14}$	610.59 ± 0.06	29886 ± 3	73286 ± 8	78458 ± 9	37299 ± 4	535425 ± 61	358196 ± 41	191476 ± 22	202319 ± 23
(87) Sylvia, (beta)	1.48×10^{19} $\pm 6 \times 10^{16}$	1351.35 ± 0.01	47926 ± 63	117522 ± 154	125816 ± 165	59814 ± 79	858616 ± 1128	574409 ± 755	307054 ± 404	324443 ± 426
(87) Sylvia, (gamma)	1.48×10^{19} $\pm 6 \times 10^{16}$	701.64 ± 0.02	24884 ± 32	61019 ± 79	65325 ± 84	31056 ± 40	445806 ± 576	298241 ± 386	159427 ± 206	168455 ± 218
(90) Antiope	8.28×10^{17} $\pm 2.2 \times 10^{16}$	171 ± 1	15857 ± 49	38883 ± 120	41627 ± 128	19790 ± 61	284078 ± 876	190047 ± 586	101590 ± 313	107344 ± 331
(93) Minerva, (beta)	3.35×10^{18} $\pm 5.4 \times 10^{17}$	623.5 ± 10	36284 ± 1571	88974 ± 3853	95252 ± 4125	45284 ± 1961	650040 ± 28148	434873 ± 18831	232464 ± 10066	245629 ± 10636
(93) Minerva, (gamma)	3.35×10^{18} $\pm 5.4 \times 10^{17}$	375 ± 16	21823 ± 329	53513 ± 806	57289 ± 863	27236 ± 410	390962 ± 5891	261551 ± 3941	139814 ± 2107	147732 ± 2226
(107) Camilla	1.12×10^{19} $\pm 3 \times 10^{17}$	1250 ± 10	48648 ± 48	119292 ± 118	127710 ± 126	60714 ± 60	871544 ± 859	583058 ± 574	311677 ± 307	329328 ± 325
(121) Hermione	4.7×10^{18} $\pm 2 \times 10^{17}$	747 ± 11	38831 ± 30	95220 ± 72	101940 ± 78	48463 ± 37	695675 ± 529	465402 ± 354	248784 ± 189	262873 ± 200
(130) Elektra, (beta)	6.6×10^{18} $\pm 4 \times 10^{17}$	1318 ± 25	61183 ± 101	150029 ± 249	160616 ± 266	76358 ± 127	1096106 ± 1817	733288 ± 1216	391984 ± 650	414182 ± 687
(130) Elektra, (gamma)	6.6×10^{18} $\pm 4 \times 10^{17}$	460	21354 ± 449	52362 ± 1101	56057 ± 1179	26650 ± 560	382556 ± 8043	255928 ± 5381	136808 ± 2876	144555 ± 3039
(216) Kleopatra, (beta)	4.64×10^{18} $\pm 2 \times 10^{16}$	678 ± 13	35396 ± 630	86795 ± 1544	92921 ± 1653	44175 ± 786	634126 ± 11283	424226 ± 7549	226773 ± 4035	239615 ± 4263
(216) Kleopatra, (gamma)	4.64×10^{18} $\pm 2 \times 10^{16}$	454 ± 6	23702 ± 280	58120 ± 687	62221 ± 736	29580 ± 350	424621 ± 5022	284069 ± 3360	151851 ± 1796	160450 ± 1898
(243) Ida	4.2×10^{16} $\pm 6 \times 10^{15}$	108	27054 ± 1425	66341 ± 3496	71022 ± 3742	33764 ± 1779	484685 ± 25539	324251 ± 17085	173330 ± 9133	183146 ± 9650
(283) Emma	1.38×10^{18} $\pm 3 \times 10^{16}$	581 ± 3.6	45441 ± 49	111427 ± 120	119290 ± 129	56711 ± 61	814083 ± 878	544616 ± 587	291128 ± 314	307615 ± 332
(317) Roxane	7.2809×10^{16}	257	53592 ± 2	131415 ± 4	140689 ± 5	66884 ± 2	960115 ± 32	642311 ± 21	343351 ± 11	362796 ± 12
(379) Huenna	3.83×10^{17} $\pm 1.9 \times 10^{16}$	3336 ± 54.9	399994 ± 132	980844 ± 327	1050060 ± 350	499205 ± 166	7166027 ± 2389	4794027 ± 1598	2562675 ± 854	2707804 ± 905
(617) Patroclus	1.36×10^{18} $\pm 1.1 \times 10^{17}$	680 ± 20	53443 ± 166	131050 ± 406	140298 ± 435	66698 ± 207	957447 ± 2968	640526 ± 1986	342397 ± 1061	361787 ± 1121
(624) Hektor	7.91×10^{18} $\pm 1.41 \times 10^{18}$	957.5 ± 55.3	41845 ± 248	102609 ± 609	109850 ± 652	52223 ± 310	749662 ± 4450	501519 ± 2977	268090 ± 1591	283272 ± 1682
(702) Alauda	6.06×10^{18} $\pm 3.6 \times 10^{17}$	1227 ± 24	41845 ± 248	102609 ± 609	109850 ± 652	52223 ± 310	749662 ± 4450	501519 ± 2977	268090 ± 1592	283272 ± 1682

(762) Pulcova	1.4×10^{18} $\pm 1 \times 10^{17}$	703 ± 14	54719 ± 250	134179 ± 612	143648 ± 656	68291 ± 312	980313 ± 4474	655823 ± 2993	350574 ± 1600	370428 ± 691
(809) Lundia	4.86×10^{14} $\pm 3.12 \times 10^{14}$	15.8	17499 ± 7144	42909 ± 17518	45937 ± 18754	21839 ± 8916	313495 ± 127986	209726 ± 85622	112110 ± 45770	118459 ± 48362
(854) Frostia	1.65×10^{14} $\pm 9.02 \times 10^{12}$	17	26989 ± 510	66180 ± 1250	70850 ± 1338	33683 ± 636	483511 ± 9130	323466 ± 6108	172910 ± 3265	182703 ± 3450
(939) Isberga	3.61×10^{15} $\pm 1.74 \times 10^{15}$	33 ± 4.5	18731 ± 1411	45932 ± 3460	49174 ± 3704	23377 ± 1761	335581 ± 25276	224501 ± 16910	120008 ± 9039	126805 ± 9551
(1052) Belgica	7.86×10^{14} $\pm 1.93 \times 10^{13}$	34	32077 ± 265	78658 ± 651	84208 ± 697	40033 ± 331	574672 ± 4754	384452 ± 3180	205511 ± 1700	217149 ± 1797
(1089) Tama	8.9×10^{14} $\pm 3.2 \times 10^{14}$	20.7 ± 1.3	18738 ± 1635	45949 ± 4008	49192 ± 4291	23386 ± 2040	335706 ± 29284	224585 ± 19591	120053 ± 10472	126852 ± 11066
(1139) Atami	3.991×10^{14}	15	17740 ± 1	43501 ± 1	46571 ± 2	22140 ± 1	317821 ± 11	212620 ± 7	113657 ± 4	120094 ± 4
(1313) Berna	1.14×10^{15} $\pm 5.17 \times 10^{13}$	25	20838 ± 324	51099 ± 795	54705 ± 851	26007 ± 405	373328 ± 5808	249754 ± 3885	133507 ± 2077	141068 ± 2195
(1338) Duponta	3.80×10^{14} $\pm 8.89 \times 10^{12}$	14	16837 ± 133	41286 ± 326	44200 ± 349	21013 ± 166	301638 ± 2384	201794 ± 1595	107870 ± 852	113979 ± 901
(1453) Fennia	2.85×10^{14} $\pm 4.75 \times 10^{13}$	15	19845 ± 1243	48662 ± 3048	52096 ± 3263	24767 ± 1551	355525 ± 22271	237844 ± 14899	127141 ± 7964	134341 ± 8415
(1509) Esclangona	3.98×10^{14} $\pm 8.64 \times 10^{13}$	140	165753 ± 14094	406452 ± 34562	435135 ± 37001	206866 ± 17590	2969530 ± 252507	1986597 ± 168925	1061947 ± 90300	1122087 ± 95415
(1717) Arlon	6.38×10^{14} $\pm 3.56 \times 10^{13}$	17	17193 ± 332	42159 ± 813	45135 ± 871	21457 ± 414	308016 ± 5942	206061 ± 3975	110151 ± 2125	116389 ± 2246
(1727) Mette	8.84×10^{14}	21	19054 ± 1	46724 ± 2	50021 ± 2	23780 ± 1	341364 ± 11	228370 ± 8	122077 ± 4	128990 ± 4
(1830) Pogson	4.12×10^{14} $\pm 1.72 \times 10^{13}$	18	21068 ± 301	51663 ± 739	55309 ± 791	26294 ± 376	377448 ± 5398	252510 ± 3611	134981 ± 1930	142625 ± 2040
(1862) Apollo	3.35×10^{12} $\pm 5.5 \times 10^{11}$	3.75 ± 0.25	21823 ± 306	53513 ± 749	57289 ± 802	27236 ± 381	390962 ± 5472	261551 ± 3661	139814 ± 1957	147732 ± 2068
(2006) Polonskaya	7.71×10^{13} $\pm 8.18 \times 10^{12}$	8.5	17387 ± 662	42635 ± 1622	45643 ± 1737	21699 ± 826	311489 ± 11852	208384 ± 7929	111393 ± 4239	117701 ± 4479
(2044) Wirt	2.31×10^{14} $\pm 6.10 \times 10^{13}$	12	17022 ± 1828	41740 ± 4482	44686 ± 4799	21244 ± 2281	304955 ± 32749	204013 ± 21909	109056 ± 11711	115232 ± 12375
(2047) Smetana	2.28×10^{13} $\pm 3.40 \times 10^{12}$	6.3	19349 ± 1068	47447 ± 2620	50795 ± 2805	24148 ± 1333	346644 ± 19142	231903 ± 12806	123965 ± 6846	130985 ± 7233
(2121) Sevastopol	5.37×10^{14} $\pm 7.47 \times 10^{12}$	26	27860 ± 129	68316 ± 318	73137 ± 340	34770 ± 162	499117 ± 2321	333906 ± 1553	178492 ± 830	188600 ± 877
(2131) Mayall	4.76×10^{14} $\pm 1.21 \times 10^{13}$	18	20079 ± 172	49235 ± 422	52710 ± 451	25059 ± 215	359714 ± 3081	240646 ± 2061	128639 ± 1102	135924 ± 1164
(2478) Tokai	4.45×10^{14} $\pm 3.30 \times 10^{12}$	21	23947 ± 59	58722 ± 144	62866 ± 154	29887 ± 73	429020 ± 1050	287012 ± 703	153424 ± 376	162112 ± 397
(2577) Litva, (beta)	5.36×10^{13} $\pm 8.04 \times 10^{11}$	21	48492 ± 243	118909 ± 597	127301 ± 639	60519 ± 304	868749 ± 4358	581188 ± 2916	310677 ± 1559	328271 ± 1647
(2577) Litva, (gamma)	5.36×10^{13} $\pm 8.04 \times 10^{11}$	378	872854 ± 4376	2140366 ± 10737	2291409 ± 11495	1089349 ± 5465	15637479 ± 78449	10461376 ± 52481	5592189 ± 28054	5908885 ± 29648
(2691) Sersic	1.05×10^{14} $\pm 6.91 \times 10^{12}$	12	22158 ± 509	54334 ± 1247	58168 ± 1335	27653 ± 635	396960 ± 9112	265564 ± 6096	141959 ± 3259	149998 ± 3443
(2754) Efimov	2.26×10^{14} $\pm 3.15 \times 10^{12}$	10	14298 ± 66	35061 ± 163	37535 ± 175	17844 ± 83	256156 ± 1192	171367 ± 797	91605 ± 426	96793 ± 451
(2815) Soma	2.81×10^{14} $\pm 1.09 \times 10^{13}$	13	17275 ± 229	42360 ± 561	45349 ± 601	21559 ± 286	309479 ± 4102	207040 ± 2744	110674 ± 1467	116942 ± 1550
(3034) Climenhaga	8.30×10^{14}	19	17603 ± 1	43164 ± 1	46210 ± 2	21969 ± 1	315358 ± 11	210973 ± 7	112777 ± 4	119163 ± 4
(3073) Kursk	2.51×10^{14} $\pm 2.25 \times 10^{12}$	22	30375 ± 90	74483 ± 221	79740 ± 237	37909 ± 113	544175 ± 1618	364050 ± 1083	194605 ± 579	205626 ± 612
(3169) Ostro	1.86×10^{14} $\pm 6.2 \times 10^{13}$	5.2	7932 ± 1148	19451 ± 2814	20823 ± 3013	9900 ± 1432	142108 ± 20560	95069 ± 13754	50820 ± 7352	53698 ± 7769
(3309) Brorfelde	9.74×10^{13} $\pm 4.79 \times 10^{12}$	9	17030 ± 288	41761 ± 706	44708 ± 756	21255 ± 359	305107 ± 5158	204115 ± 3451	109111 ± 1845	115290 ± 1949
(3671) Dionysus	2.48×10^{12}	3.4 ± 0.6	21872 ± 1036	53633 ± 2541	57418 ± 2720	27297 ± 1293	391844 ± 18566	262141 ± 12420	140129 ± 6639	148065 ± 7015
(3673) Levy	1.97×10^{14} $\pm 1.44 \times 10^{13}$	13	19450 ± 496	47695 ± 1216	51060 ± 1301	24274 ± 619	348456 ± 8881	233115 ± 5942	124613 ± 3176	131670 ± 3356
(3703) Volkonskaya	3.48×10^{13} $\pm 3.01 \times 10^{12}$	7.8	20805 ± 636	51018 ± 1560	54618 ± 1671	25966 ± 794	372737 ± 11401	249358 ± 7627	133296 ± 4077	140845 ± 4308
(3749) Balam, (beta)	5.1×10^{14} $\pm 2 \times 10^{13}$	289 ± 13	314969 ± 10141	772350 ± 24866	826854 ± 26620	393091 ± 12655	5642780 ± 181666	3774985 ± 121534	2017940 ± 64967	2132219 ± 68644

(3749) Balam, (gamma)	5.1×10^{14} $\pm 2 \times 10^{13}$	20	21797 ± 292	53450 ± 716	57222 ± 766	27204 ± 364	390504 ± 5229	261245 ± 3498	139650 ± 1870	147558 ± 1976
(3782) Celle	2×10^{14} $\pm 2.15 \times 10^{13}$	18 ± 1	26801 ± 544	65721 ± 1333	70359 ± 1427	33449 ± 678	480155 ± 9739	321220 ± 6516	171710 ± 3483	181435 ± 3680
(3841) Diccico	1.83×10^{14}	12	18412 ± 1	45149 ± 2	48336 ± 2	22979 ± 1	329861 ± 11	220675 ± 7	117963 ± 4	124643 ± 4
(3868) Mendoza	6.38×10^{14} $\pm 1.05 \times 10^{13}$	20	20233 ± 111	49615 ± 273	53116 ± 292	25252 ± 139	362487 ± 1995	242501 ± 1335	129630 ± 713	136972 ± 754
(3873) Roddy	3.20×10^{14} $\pm 3.17 \times 10^{13}$	14	17817 ± 629	43690 ± 1544	46773 ± 1653	22236 ± 786	319198 ± 11279	213542 ± 7545	114150 ± 4033	120614 ± 4262
(3905) Doppler	2.07×10^{14}	26	38302 ± 1	93923 ± 3	100551 ± 3	47803 ± 2	686201 ± 23	459064 ± 15	245396 ± 8	259293 ± 8
(3951) Zichichi	2.18×10^{14} $\pm 2.05 \times 10^{13}$	16	23142 ± 772	56747 ± 1892	60751 ± 2026	28881 ± 963	414590 ± 13823	277358 ± 9248	148263 ± 4943	156660 ± 5223
(4029) Bridges	3.98×10^{14} $\pm 1.07 \times 10^{13}$	13	15393 ± 140	37747 ± 344	40411 ± 368	19211 ± 175	275778 ± 2510	184494 ± 1679	98622 ± 898	104207 ± 949
(4383) Suruga	2.13×10^{14} $\pm 9.06 \times 10^{12}$	11	16048 ± 234	39352 ± 574	42129 ± 615	20028 ± 292	287506 ± 4196	192340 ± 2807	102816 ± 1501	108639 ± 1586
(4440) Tchantches	8.67×10^{12} $\pm 6.06 \times 10^{12}$	3.8	16109 ± 7931	39502 ± 19448	42290 ± 20820	20105 ± 9898	288602 ± 142086	193073 ± 95054	103208 ± 50812	109053 ± 53690
(4492) Debussy	1.49×10^{15} $\pm 1.80 \times 10^{14}$	31	23633 ± 1034	57951 ± 2537	62041 ± 2716	29494 ± 1291	423389 ± 18535	283245 ± 12400	151410 ± 6628	159985 ± 7004
(4514) Vilen	1.89×10^{14}	11	16684 ± 1	40911 ± 1	43798 ± 1	20822 ± 1	298897 ± 10	199960 ± 7	106890 ± 4	112943 ± 4
(4607) Seilandfarm	3.00×10^{14} $\pm 1.52 \times 10^{13}$	19	24711 ± 431	60595 ± 1057	64871 ± 1132	30840 ± 538	442708 ± 7725	296169 ± 5168	158319 ± 2762	167285 ± 2919
(4674) Pauling	7.44×10^{13} $\pm 2.50 \times 10^{12}$	250	517692 ± 5916	1269456 ± 14511	1359040 ± 15535	646096 ± 7386	9274625 ± 106020	6204666 ± 70926	3316740 ± 37914	3504573 ± 40064
(4765) Wasserburg	5.59×10^{12} $\pm 3.83 \times 10^{12}$	2.9	14231 ± 6695	34897 ± 16417	37360 ± 17576	17761 ± 8356	254960 ± 119943	170567 ± 80241	91177 ± 42893	96341 ± 45323
(4786) Tatiana	2.83×10^{13} $\pm 5.22 \times 10^{12}$	6.6	18860 ± 1326	46248 ± 3251	49511 ± 3480	23538 ± 1654	337884 ± 23749	226042 ± 15888	120832 ± 8493	127675 ± 8974
(4868) Knushevia	3.33×10^{12} $\pm 1.89 \times 10^{12}$	2.1	12241 ± 3923	30017 ± 9619	32136 ± 10298	15277 ± 4896	219305 ± 70275	146714 ± 47014	78427 ± 25131	82868 ± 26555
(4951) Iwamoto	7.09×10^{13} $\pm 9.69 \times 10^{11}$	31	65224 ± 297	159939 ± 730	171226 ± 781	81402 ± 372	1168514 ± 5333	781729 ± 3568	417878 ± 1907	441543 ± 2016
(5143) Heracles	5.21×10^{13} $\pm 4.05 \times 10^{13}$	4	9325 ± 6069	22865 ± 14883	24479 ± 15934	11637 ± 7575	167054 ± 108737	111758 ± 72744	59741 ± 38886	63124 ± 41088
(5261) Eureka	1.41×10^{12} $\pm 7.12 \times 10^{10}$	2.1	16296 ± 283	39959 ± 693	42779 ± 742	20337 ± 353	291941 ± 5064	195307 ± 3388	104402 ± 1811	110315 ± 1914
(5381) Sekhmet	1.07×10^{12} $\pm 1.56 \times 10^{11}$	1.54 ± 0.12	13111 ± 397	32149 ± 973	34418 ± 1041	16362 ± 495	234879 ± 7107	157133 ± 4755	83996 ± 2542	88753 ± 2686
(5407) 1992 AX	5.95×10^{13} $\pm 3.91 \times 10^{13}$	5.8	12937 ± 5536	31723 ± 13576	33961 ± 14534	16145 ± 6909	231766 ± 99184	155050 ± 66353	82883 ± 35469	87577 ± 37478
(5426) Sharp	7.63×10^{12} $\pm 3.56 \times 10^{12}$	4.5	19904 ± 4647	48807 ± 11395	52251 ± 12199	24840 ± 5800	356580 ± 83252	238550 ± 55695	127518 ± 29772	134740 ± 31458
(5477) Holmes	2.16×10^{13} $\pm 2.85 \times 10^{12}$	6.7	20938 ± 1007	51343 ± 2469	54966 ± 2643	26131 ± 1257	375109 ± 18040	250946 ± 12068	134144 ± 6451	141741 ± 6817
(5481) Kiuchi	3.56×10^{14} $\pm 2.84 \times 10^{12}$	15	18424 ± 49	45179 ± 119	48367 ± 128	22994 ± 61	330078 ± 872	220820 ± 583	118041 ± 312	124725 ± 329
(5646) 1990 TR	1.79×10^{13} $\pm 9.32 \times 10^{12}$	5.1	16983 ± 4724	41646 ± 11585	44585 ± 12402	21196 ± 5896	304264 ± 84639	203551 ± 56623	108809 ± 30268	114971 ± 31982
(5899) Jedicke	1.39×10^{13} $\pm 2.60 \times 10^{12}$	4.4	15938 ± 1138	39082 ± 2791	41840 ± 2988	19891 ± 1420	285530 ± 20389	191018 ± 13640	102110 ± 7292	107892 ± 7705
(5905) Johnson	7.39×10^{13} $\pm 3.48 \times 10^{12}$	9.3	19299 ± 313	47324 ± 767	50664 ± 821	24086 ± 390	345749 ± 5601	231304 ± 3747	123645 ± 2003	130647 ± 2116
(6084) Bascom	1.78×10^{14} $\pm 1.88 \times 10^{13}$	20	30958 ± 1169	75912 ± 2867	81269 ± 3070	38636 ± 1459	554615 ± 20949	371034 ± 14015	198338 ± 7492	209570 ± 7916
(6244) Okamoto	2.51×10^{14} $\pm 2.25 \times 10^{12}$	13	17949 ± 53	44013 ± 131	47119 ± 140	22401 ± 67	321558 ± 956	215120 ± 640	114994 ± 342	121506 ± 361
(6265) 1985 TW3	9.34×10^{13} $\pm 5.82 \times 10^{12}$	8	15356 ± 332	37655 ± 815	40312 ± 872	19165 ± 415	275108 ± 5953	184045 ± 3982	98383 ± 2129	103954 ± 2250
(6615) Plutarchos	2.59×10^{13} $\pm 9.91 \times 10^{11}$	9.7	28529 ± 372	69958 ± 912	74895 ± 976	35606 ± 464	511114 ± 6662	341932 ± 4457	182782 ± 2382	193133 ± 2517
(6708) Bobbievaile	4.32×10^{14} $\pm 3.23 \times 10^{12}$	19	21883 ± 54	53659 ± 133	57446 ± 142	27310 ± 68	392033 ± 969	262267 ± 649	140197 ± 347	148136 ± 366
(7088) Ishtar	2.25×10^{12}	2.8	18606 ± 1	45626 ± 2	48846 ± 2	23221 ± 1	333341 ± 11	223003 ± 7	119208 ± 4	125959 ± 4

(7225) Huntress	2.35×10^{14} $\pm 2.37 \times 10^{13}$	10	14108 ± 507	34594 ± 1243	37035 ± 1331	17607 ± 633	252742 ± 9085	169083 ± 6078	90384 ± 3249	95503 ± 3433
(7369) Gavrilin	3.59×10^{14}	27	33076 ± 1	81107 ± 3	86831 ± 3	41280 ± 1	592568 ± 20	396424 ± 13	211911 ± 7	223912 ± 7
(7958) Leakey	1.90×10^{13} $\pm 3.20 \times 10^{12}$	10	32650 ± 2074	80062 ± 5085	85712 ± 5444	40748 ± 2588	584932 ± 37153	391316 ± 24855	209180 ± 13286	221026 ± 14039
(8116) Jeanperrin	7.80×10^{13} $\pm 4.13 \times 10^{12}$	13	26499 ± 484	64980 ± 1187	69565 ± 1270	33072 ± 604	474740 ± 8669	317598 ± 5800	169774 ± 3100	179388 ± 3276
(8306) Shoko	2.77×10^{13}	9.4	27049 ± 1	66327 ± 2	71008 ± 2	33757 ± 1	484583 ± 16	324183 ± 11	173294 ± 6	183108 ± 6
(8373) Stephengould	1.24×10^{14}	15	26191 ± 1	64225 ± 2	68757 ± 2	32688 ± 1	469225 ± 16	313909 ± 10	167802 ± 6	177305 ± 6
(8474) Rettig	7.63×10^{13}	14	28737 ± 1	70466 ± 2	75439 ± 3	35864 ± 1	514827 ± 17	344416 ± 12	184110 ± 6	194536 ± 6
(9069) Hovland	2.26×10^{13}	7.8	24016 ± 1	58890 ± 2	63046 ± 2	29972 ± 1	430248 ± 14	287833 ± 10	153863 ± 5	162577 ± 5
(9260) Edwardolson	5.40×10^{13} $\pm 1.40 \times 10^{13}$	7.2	16582 ± 1738	40663 ± 4261	43532 ± 4562	20695 ± 2169	297081 ± 31133	198745 ± 20828	106240 ± 11134	112257 ± 11764
(9617) Grahamchapman	3.71×10^{11} $\pm 1.81 \times 10^{11}$	5.2	33206 ± 2680	81427 ± 6571	87173 ± 7035	41443 ± 3344	594903 ± 48007	397986 ± 32116	212746 ± 17168	224794 ± 18140
(10208) Germanicus	2.85×10^{13} $\pm 4.72 \times 10^{12}$	13	37061 ± 2307	90879 ± 5658	97293 ± 6057	46253 ± 2880	663963 ± 41338	444187 ± 27655	237443 ± 14783	250890 ± 15621
(11217) 1999 JC4	3.01×10^{13}	6.2	17354 ± 1	42554 ± 1	45557 ± 2	21658 ± 1	310902 ± 10	207992 ± 7	111183 ± 4	117480 ± 4
(11264) Claudiomaccone	4.02×10^{13}	6	15250 ± 1	37394 ± 1	40033 ± 1	19032 ± 1	273202 ± 9	182770 ± 6	97701 ± 3	103234 ± 3
(15268) Wendelinefroger	4.71×10^{13}	8.7	20982 ± 1	51450 ± 2	55081 ± 2	26186 ± 1	375895 ± 13	251471 ± 8	134425 ± 4	142038 ± 5
(15430) 1998 UR31	4.38×10^{13} $\pm 1.05 \times 10^{12}$	8.2	20250 ± 164	49657 ± 403	53161 ± 432	25273 ± 205	362794 ± 2945	242707 ± 1970	129740 ± 1053	137088 ± 1113
(15822) 1994 TV15	4.43×10^{12} $\pm 2.18 \times 10^{12}$	3.3	17501 ± 4427	42916 ± 10856	45944 ± 11622	21842 ± 5525	313543 ± 79311	209758 ± 53058	112127 ± 28363	118477 ± 29969
(16525) Shumarinaiko	1.17×10^{14} $\pm 1.01 \times 10^{13}$	8.1	14432 ± 442	35388 ± 1085	37886 ± 1161	18011 ± 552	258546 ± 7924	172965 ± 5301	92460 ± 2834	97696 ± 2994
(16635) 1993 QO	8.21×10^{13}	12	24044 ± 1	58959 ± 2	63119 ± 2	30007 ± 1	430751 ± 14	288170 ± 10	154043 ± 5	162766 ± 5
(17246) 2000 GL74	7.63×10^{13}	228	467997 ± 17	1147597 ± 39	1228582 ± 41	584075 ± 19	8384325 ± 280	5609061 ± 188	2998356 ± 100	3168159 ± 103
(17260) 2000 JQ58	8.26×10^{13} $\pm 1.61 \times 10^{12}$	7.4	14794 ± 97	36278 ± 237	38838 ± 254	18464 ± 121	265044 ± 1735	177312 ± 1160	94783 ± 620	100151 ± 656
(17365) 1978 VF11	2.26×10^{16} $\pm 7.94 \times 10^{14}$	43	13243 ± 158	32474 ± 389	34766 ± 416	16528 ± 198	237256 ± 2839	158723 ± 1899	84846 ± 1015	89651 ± 1073
(18890) 2000 EV26	4.82×10^{13} $\pm 7.49 \times 10^{11}$	6	14357 ± 75	35206 ± 183	37691 ± 196	17918 ± 93	257216 ± 1338	172076 ± 895	91984 ± 478	97193 ± 506
(22899) 1999 TO14	1.45×10^{14} $\pm 3.56 \times 10^{13}$	182	301383 ± 29529	739035 ± 72412	791188 ± 77522	376135 ± 36855	5399378 ± 529042	3612150 ± 353925	1930896 ± 189193	2040246 ± 199909
(26074) Carlwirtz	3.97×10^{13}	6.1	15565 ± 1	38167 ± 1	40860 ± 1	19425 ± 1	278848 ± 9	186547 ± 6	99720 ± 3	105367 ± 3
(26308) 1998 SM165	6.87×10^{18} $\pm 1.8 \times 10^{16}$	11377 ± 8	521118 ± 70	1277857 ± 176	1368033 ± 188	650371 ± 90	9336000 ± 1286	6245726 ± 860	3338689 ± 460	3527765 ± 489
(26471) 2000 AS152	1.57×10^{14} $\pm 3.34 \times 10^{13}$	18	29070 ± 2418	71284 ± 5929	76314 ± 6348	36280 ± 3018	520797 ± 43321	348410 ± 28981	186245 ± 15492	196792 ± 16370
(27568) 2000 PT6	5.86×10^{12} $\pm 3.56 \times 10^{12}$	3.1	14975 ± 5478	36720 ± 13432	39311 ± 14380	18689 ± 6836	268275 ± 98133	179474 ± 65651	95939 ± 35094	101372 ± 37081
(29314) Eurymadas	1.44×10^{16} $\pm 1.41 \times 10^{14}$	41	14674 ± 48	35983 ± 117	38523 ± 125	18314 ± 59	262895 ± 852	175875 ± 570	94015 ± 305	99339 ± 322
(31345) 1998 PG	7.01×10^{11} $\pm 4.14 \times 10^{11}$	1.4	13722 ± 4751	33648 ± 11651	36022 ± 12473	17125 ± 5930	245828 ± 85121	164458 ± 56945	87912 ± 30440	92890 ± 32164
(32008) 2000 HM53	6.34×10^{13}	13	28387 ± 1	69610 ± 2	74522 ± 2	35428 ± 1	508568 ± 17	340229 ± 11	181871 ± 6	192171 ± 6
(32039) 2000 JO23	5.20×10^{13}	53	123624 ± 4	303143 ± 10	324536 ± 11	154286 ± 5	2214759 ± 74	1481660 ± 50	792030 ± 26	836884 ± 27
(34706) 2001 OP83	3.53×10^{13}	7	18580 ± 1	45560 ± 2	48775 ± 2	23188 ± 1	332862 ± 11	222683 ± 7	119036 ± 4	125778 ± 4
(35107) 1991 VH	1.49×10^{12} $\pm 5.50 \times 10^{11}$	3.26 ± 0.035	24853 ± 3817	60944 ± 9359	65244 ± 10020	31018 ± 4763	445254 ± 68379	297872 ± 45745	159229 ± 24453	168247 ± 25838
(38628) Huya	5.03×10^{19} $\pm 5.93 \times 10^{18}$	1740 ± 80	41033 ± 325	100619 ± 796	107719 ± 852	51210 ± 405	735119 ± 5817	491790 ± 3892	262889 ± 2080	277777 ± 2198

(42355) Typhon	8.7×10^{17} $\pm 3 \times 10^{16}$	1580 ± 20	144116 ± 190	353392 ± 464	378331 ± 497	179861 ± 236	2581880 ± 3389	1727261 ± 2267	923318 ± 1212	975607 ± 1280
(44620) 1999 RS43	2.57×10^{11} $\pm 1.10 \times 10^{11}$	2	27376 ± 5612	67129 ± 13761	71866 ± 14732	34166 ± 7004	490445 ± 100536	328105 ± 67258	175390 ± 35953	185323 ± 37989
(47171) 1999 TC36, (<i>beta</i>)	2.40×10^{13}	5.4	16300 ± 107	39969 ± 263	42789 ± 282	20342 ± 134	292011 ± 1924	195354 ± 1287	104427 ± 688	110341 ± 727
(47171) 1999 TC36, (<i>gamma</i>)	1.28×10^{19} $\pm 6 \times 10^{16}$	7411 ± 12	275867 ± 26	676467 ± 63	724205 ± 67	344291 ± 32	4942259 ± 457	3306340 ± 306	1767423 ± 163	1867516 ± 171
(46829) 1998 OS14	1.28×10^{19} $\pm 6 \times 10^{16}$	867 ± 11	32273 ± 361	79139 ± 884	84723 ± 947	40278 ± 450	578186 ± 6460	386803 ± 4322	206768 ± 2310	218477 ± 2441
(51356) 2000 RY76	2.82×10^{13}	13	37176 ± 1	91161 ± 3	97594 ± 3	46397 ± 2	666019 ± 22	445563 ± 15	238178 ± 8	251667 ± 8
(52316) 1992 BD	2.90×10^{13} $\pm 5.34 \times 10^{11}$	4.9	13883 ± 86	34043 ± 210	36445 ± 225	17326 ± 107	248718 ± 1536	166391 ± 1028	88945 ± 549	93982 ± 581
(53432) 1999 UT55	1.39×10^{13}	4	14489 ± 1	35529 ± 1	38037 ± 1	18083 ± 1	259577 ± 9	173655 ± 6	92828 ± 3	98085 ± 3
(65489) Ceto	5.41×10^{18} $\pm 4.2 \times 10^{17}$	1840 ± 44	91267 ± 247	223799 ± 605	239593 ± 648	113904 ± 308	1635074 ± 4422	1093854 ± 2958	584726 ± 1581	617840 ± 1671
(65803) Didymos	5.27×10^{11} $\pm 1.51 \times 10^{11}$	1.18 ± 0.03	12721 ± 1154	31193 ± 2830	33394 ± 3030	15876 ± 1440	227893 ± 20675	152459 ± 13831	81498 ± 7394	86113 ± 7812
(66063) 1998 RO1	4.47×10^{11} $\pm 2.29 \times 10^{11}$	1.2 ± 0.3	13666 ± 1218	33511 ± 2987	35876 ± 3198	17056 ± 1520	244830 ± 21827	163790 ± 14602	87555 ± 7805	92513 ± 8247
(66391) 1999 KW4	2.49×10^{12} $\pm 5.4 \times 10^{10}$	2.548 ± 0.015	16369 ± 22	40140 ± 55	42972 ± 59	20429 ± 28	293259 ± 402	196189 ± 269	104874 ± 144	110813 ± 152
(69230) Hermes	2.03×10^{11} $\pm 1.10 \times 10^{11}$	1.1	16306 ± 4861	39985 ± 11919	42807 ± 12760	20351 ± 6066	292133 ± 87079	195435 ± 58255	104471 ± 31141	110388 ± 32904
(69406) 1995 SX48	2.54×10^{13} $\pm 4.89 \times 10^{11}$	5.3	15690 ± 101	38474 ± 249	41189 ± 266	19582 ± 126	281092 ± 1816	188049 ± 1215	100523 ± 649	106216 ± 686
(76818) 2000 RG79	3.91×10^{13} $\pm 9.77 \times 10^{11}$	5.6	14367 ± 121	35231 ± 297	37717 ± 318	17931 ± 151	257396 ± 2172	172196 ± 1453	92048 ± 777	97261 ± 821
(79472) 1998 AX4	4.56×10^{13} $\pm 1.08 \times 10^{12}$	9	21933 ± 176	53783 ± 431	57578 ± 461	27373 ± 219	392936 ± 3147	262872 ± 2105	140520 ± 1125	148478 ± 1189
(80218) 1999 VO123	1.84×10^{10}	0.9	29690 ± 1	72803 ± 2	77941 ± 3	37054 ± 1	531900 ± 18	355838 ± 12	190215 ± 6	200988 ± 7
(85938) 1999 DJ4	7.46×10^{10} $\pm 3.76 \times 10^{10}$	0.8	16548 ± 4358	40577 ± 10688	43441 ± 11442	20652 ± 5440	296457 ± 78084	198328 ± 52237	106017 ± 27924	112021 ± 29505
(88710) 2001 SL9	7.42×10^{11} $\pm 4.63 \times 10^{10}$	1.6	15388 ± 334	37734 ± 818	40396 ± 876	19205 ± 416	275681 ± 5978	184429 ± 3999	98587 ± 2138	104171 ± 2259
(90482) Orcus	6.36×10^{20} $\pm 3.3 \times 10^{18}$	9006 ± 16	91188 ± 8	223607 ± 19	239387 ± 20	113806 ± 9	1633672 ± 136	1092916 ± 91	584225 ± 49	617311 ± 51
(99913) 1997 CZ5	2.60×10^{14}	11	15008 ± 1	36802 ± 1	39399 ± 1	18731 ± 1	268875 ± 9	179875 ± 6	96153 ± 3	101599 ± 3
(136617) 1994 CC, (<i>beta</i>)	2.66×10^{11} $\pm 3.29 \times 10^{10}$	1.729 ± 0.008	23410 ± 939	57404 ± 2303	61455 ± 2466	29216 ± 1172	419392 ± 16827	280570 ± 11257	149981 ± 6018	158474 ± 6359
(136617) 1994 CC, (<i>gamma</i>)	2.66×10^{11} $\pm 3.29 \times 10^{10}$	6.130 ± 0.108	82997 ± 2203	203520 ± 5403	217882 ± 5784	103582 ± 2750	1486912 ± 39473	994735 ± 26407	531741 ± 14116	561855 ± 14916
(137170) 1999 HF1	5.09×10^{13} $\pm 3.08 \times 10^{13}$	7.3 ± 1.8	16556 ± 1301	40597 ± 3189	43462 ± 3414	20662 ± 1623	296601 ± 23301	198424 ± 15588	106069 ± 8333	112076 ± 8805
(153591) 2001 SN263, (<i>beta</i>)	9.51×10^{12} $\pm 1.3 \times 10^{11}$	16.633 ± 0.163	68360 ± 361	167629 ± 885	179459 ± 947	85316 ± 450	1224698 ± 6466	819315 ± 4326	437970 ± 2312	462773 ± 2443
(153591) 2001 SN263, (<i>gamma</i>)	9.51×10^{12} $\pm 1.3 \times 10^{11}$	3.804 ± 0.002	15634 ± 63	38337 ± 155	41043 ± 166	19512 ± 79	280091 ± 1131	187379 ± 756	100165 ± 404	105837 ± 427
(153958) 2002 AM31	1.48×10^{11} $\pm 4.79 \times 10^{10}$	1.5	24668 ± 3421	60490 ± 8389	64758 ± 8981	30786 ± 4270	441936 ± 61289	295652 ± 41002	158043 ± 21918	166993 ± 23159
(162000) 1990 OS	2.29×10^{10} $\pm 4.53 \times 10^9$	0.6	18392 ± 1400	45100 ± 3434	48283 ± 3676	22954 ± 1748	329502 ± 25086	220435 ± 16782	117835 ± 8971	124508 ± 9479
(162483) 2000 PJ5	1.39×10^{11}	1.05 ± 0.1	17634 ± 1680	43241 ± 4120	46292 ± 4410	22008 ± 2097	315917 ± 30099	211346 ± 20136	112976 ± 10764	119374 ± 11373
(164121) 2003 YT1	1.27×10^{12} $\pm 3.9 \times 10^{11}$	3.93 ± 0.8	46838 ± 84382	114854 ± 206918	122959 ± 221520	58455 ± 105312	839118 ± 1511740	561365 ± 1011345	300081 ± 540620	317075 ± 571237
(175706) 1996 FG3	4.26×10^{12} $\pm 1.29 \times 10^{12}$	3 ± 0.6	16114 ± 1591	39515 ± 3902	42303 ± 4178	20111 ± 1986	288693 ± 28510	193134 ± 19073	103241 ± 10196	109088 ± 10773
(185851) 2000 DP107	4.6×10^{11} $\pm 5 \times 10^{10}$	2.62 ± 0.16	29554 ± 746	72470 ± 1828	77584 ± 1957	36884 ± 931	529461 ± 13357	354206 ± 8936	189343 ± 4777	200066 ± 5047
(276049) 2002 CE26	1.95×10^{13} $\pm 2.5 \times 10^{12}$	4.7 ± 0.2	15205 ± 34	37284 ± 83	39915 ± 89	18976 ± 42	272399 ± 604	182233 ± 404	97414 ± 216	102930 ± 228
(285263) 1998 QE2	1.44×10^{13} $\pm 3.97 \times 10^{12}$	6.212 ± 0.1	22213 ± 2113	54469 ± 5180	58313 ± 5546	27722 ± 2637	397950 ± 37848	266226 ± 25320	142313 ± 13535	150372 ± 14302

(311066) 2004 DC	3.59×10^{10}	0.75 ± 0.045	19797 ± 1189	48544 ± 2914	51970 ± 3120	24707 ± 1483	354662 ± 21292	237267 ± 14244	126832 ± 7614	134015 ± 8046
(341520) Mors-Somnus	7.81×10^{17} $\pm 9 \times 10^{15}$	21040 ± 70	1989401 ± 984	4878302 ± 2427	5222558 ± 2599	2482835 ± 1236	35640794 ± 17740	23843469 ± 11866	12745664 ± 6344	13467475 ± 6714
(357439) 2004 BL86	2.87×10^8	0.5	42225 ± 2	103543 ± 3	110849 ± 4	52698 ± 2	756480 ± 25	506081 ± 17	270528 ± 9	285849 ± 9
(363027) 1998 ST27	4.29×10^{11}	4.5 ± 0.5	51957 ± 5775	127406 ± 14161	136397 ± 15160	64844 ± 7207	930826 ± 103460	622717 ± 69214	332877 ± 36999	351728 ± 39094
(363067) 2000 CO101	2.00×10^{11}	0.61	9088	22285 ± 1	23857 ± 1	11342	162811 ± 5	108920 ± 4	58224 ± 2	61521 ± 2
(363599) 2004 FG11	3.17×10^9 $\pm 1.72 \times 10^9$	0.25 ± 0.05	14824 ± 571	36350 ± 1401	38916 ± 1500	18501 ± 713	265576 ± 10234	177669 ± 6846	94974 ± 3660	100352 ± 3867
(374851) 2006 VV2	1.00×10^{12} $\pm 1.41 \times 10^{11}$	1.5	13042 ± 676	31981 ± 1657	34238 ± 1773	16277 ± 843	233651 ± 12103	156311 ± 8097	83557 ± 4328	88289 ± 4573
(385186) 1994 AW1	6.97×10^{11} $\pm 4.44 \times 10^{10}$	2	19644 ± 435	48170 ± 1068	51569 ± 1143	24516 ± 543	351926 ± 7801	235436 ± 5219	125854 ± 2790	132981 ± 2948
(399307) 1991 RJ2	1.05×10^{11}	0.86	15887 ± 1	38958 ± 1	41707 ± 1	19828 ± 1	284626 ± 9	190413 ± 6	101786 ± 3	107551 ± 4
(399774) 2005 NB7	1.17×10^{11} $\pm 6.37 \times 10^{10}$	0.6	10673 ± 3181	26172 ± 7801	28019 ± 8352	13321 ± 3971	191215 ± 56997	127921 ± 38131	68381 ± 20383	72254 ± 21537
1994 CJ1	2.83×10^9	0.525	32329 ± 1	79275 ± 3	84869 ± 3	40347 ± 1	579180 ± 19	387468 ± 13	207123 ± 7	218853 ± 7
1994 XD	2.15×10^{11} $\pm 1.39 \times 10^{11}$	0.6 ± 0.3	8723 ± 2565	21389 ± 6289	22898 ± 6733	10886 ± 3201	156267 ± 45951	104542 ± 30741	55883 ± 16433	59048 ± 17363
2000 UG11	9.4×10^9 $\pm 1.6 \times 10^9$	0.426 ± 0.027	17576 ± 161	43100 ± 394	46141 ± 421	21936 ± 200	314885 ± 2876	210656 ± 1924	112608 ± 1028	118985 ± 1087
2002 BM26	1.82×10^{11} $\pm 2.72 \times 10^{10}$	1.4	21499 ± 1187	52718 ± 2911	56439 ± 3117	26831 ± 1482	385160 ± 21269	257669 ± 14229	137739 ± 7606	145539 ± 8037
2003 SS84	1.57×10^9 $\pm 7.31 \times 10^8$	0.27	20236 ± 4703	49621 ± 11532	53122 ± 12346	25255 ± 5869	362527 ± 84254	242529 ± 56365	129645 ± 30130	136987 ± 31837
2005 AB	5.93×10^{12}	3.4	16357 ± 1	40109 ± 1	42940 ± 1	20414 ± 1	293038 ± 10	196040 ± 7	104795 ± 4	110729 ± 4
2006 GY2	5.36×10^{10}	0.5	11546	28312 ± 1	30310 ± 1	14410	206850 ± 7	138381 ± 5	73973 ± 2	78162 ± 3
2007 DT103	2.26×10^{10}	0.45	13855 ± 1	33975 ± 1	36372 ± 1	17292 ± 1	248220 ± 8	166058 ± 6	88767 ± 3	93794 ± 3
2007 LE	1.05×10^{11}	1.4	25863 ± 1	63420 ± 2	67895 ± 2	32278 ± 1	463344 ± 15	309974 ± 10	165699 ± 6	175082 ± 6
2008 BT18	1.81×10^{11}	1.5	23092 ± 1	56625 ± 2	60621 ± 2	28819 ± 1	413700 ± 14	276763 ± 9	147945 ± 5	156324 ± 5

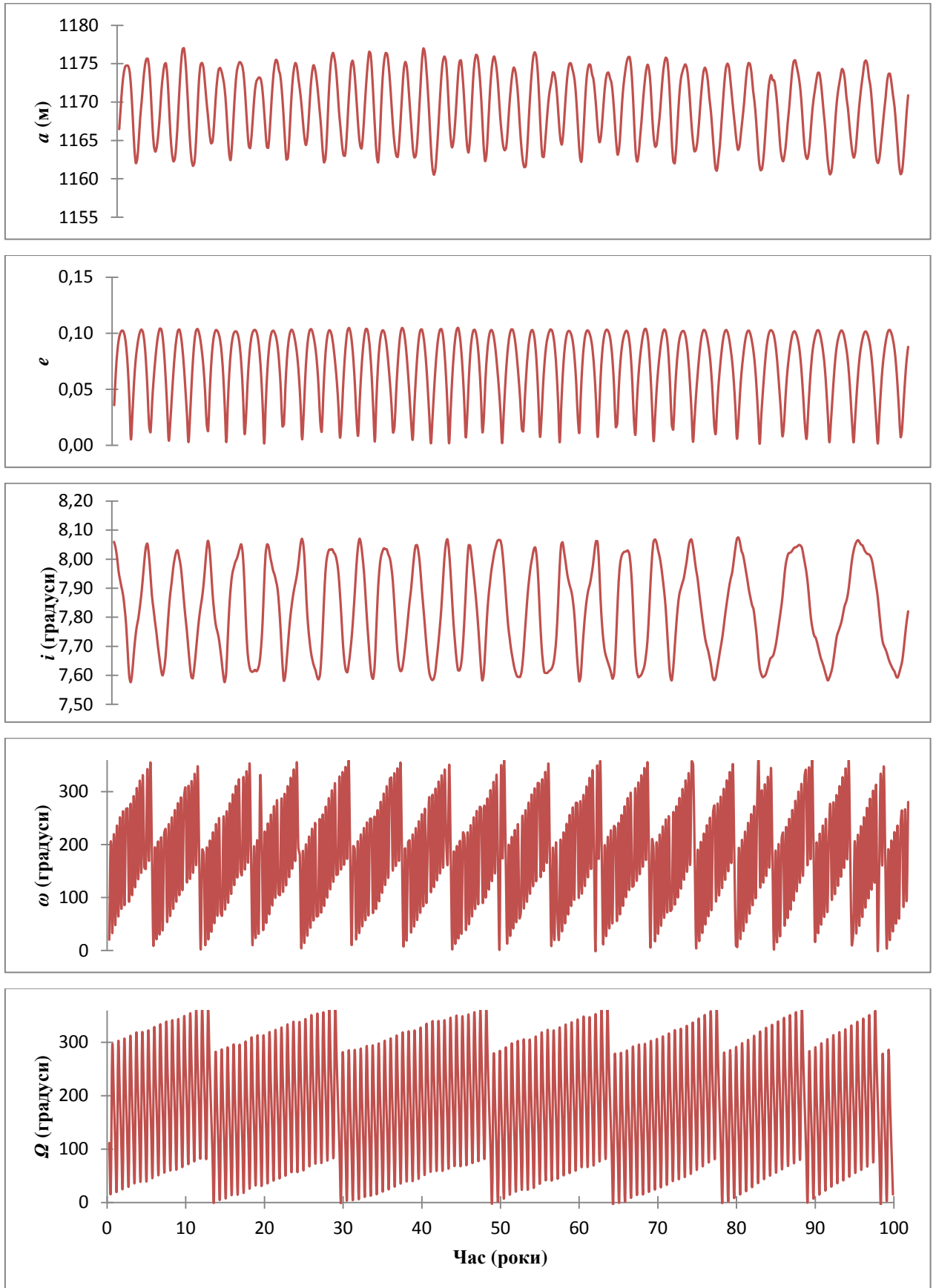


Рис. С.1. Велика піввісь, ексцентриситет, нахил, аргумент перигелію і довгота висхідного вузла для супутника "Petit-Prince" астероїда (45) Eugenia.

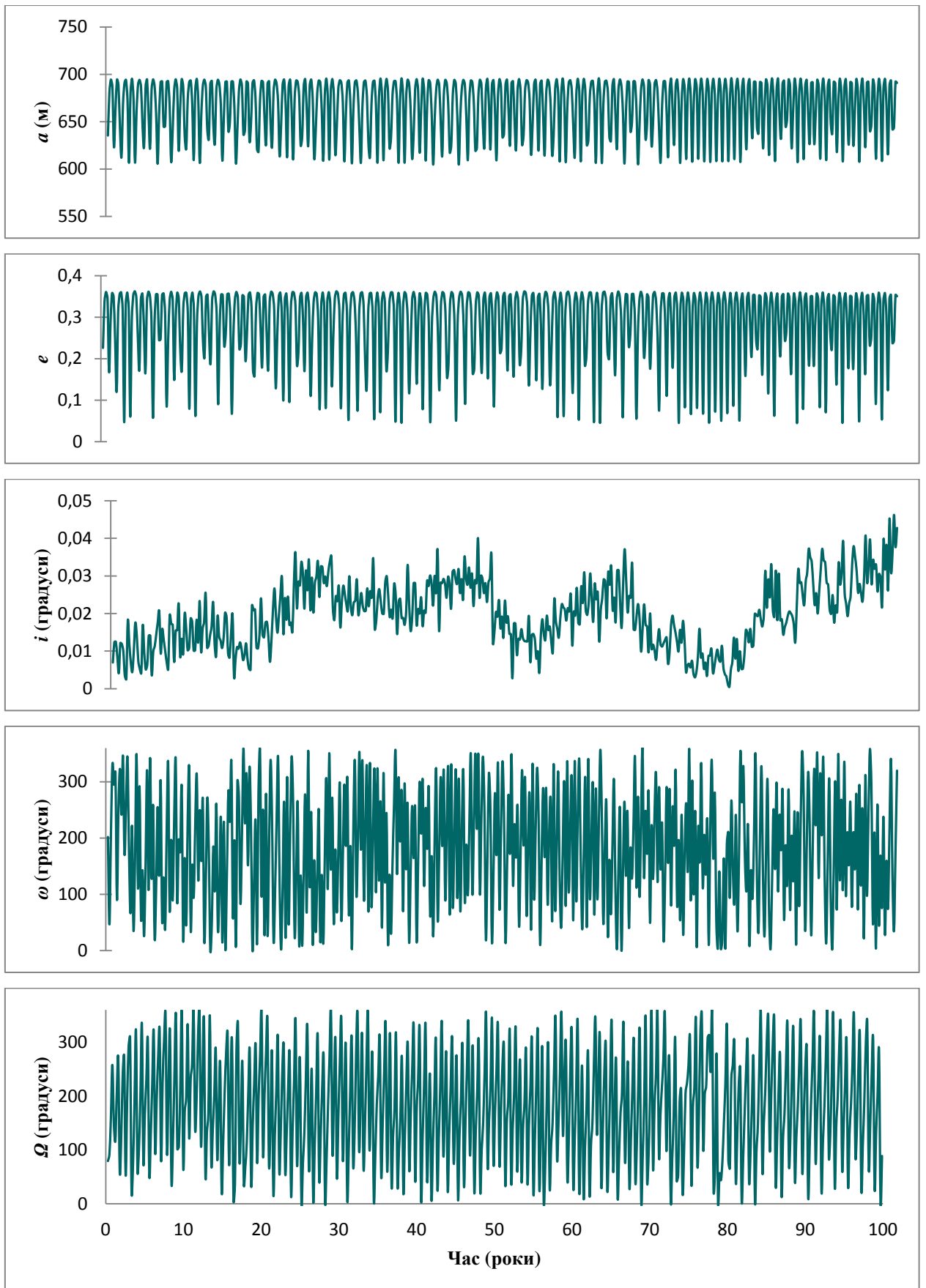


Рис. С.2. Велика піввісь, ексцентриситет, нахил, аргумент перигелію і довгота висхідного вузла для супутника "Princesse" астероїда (45) Eugenia.

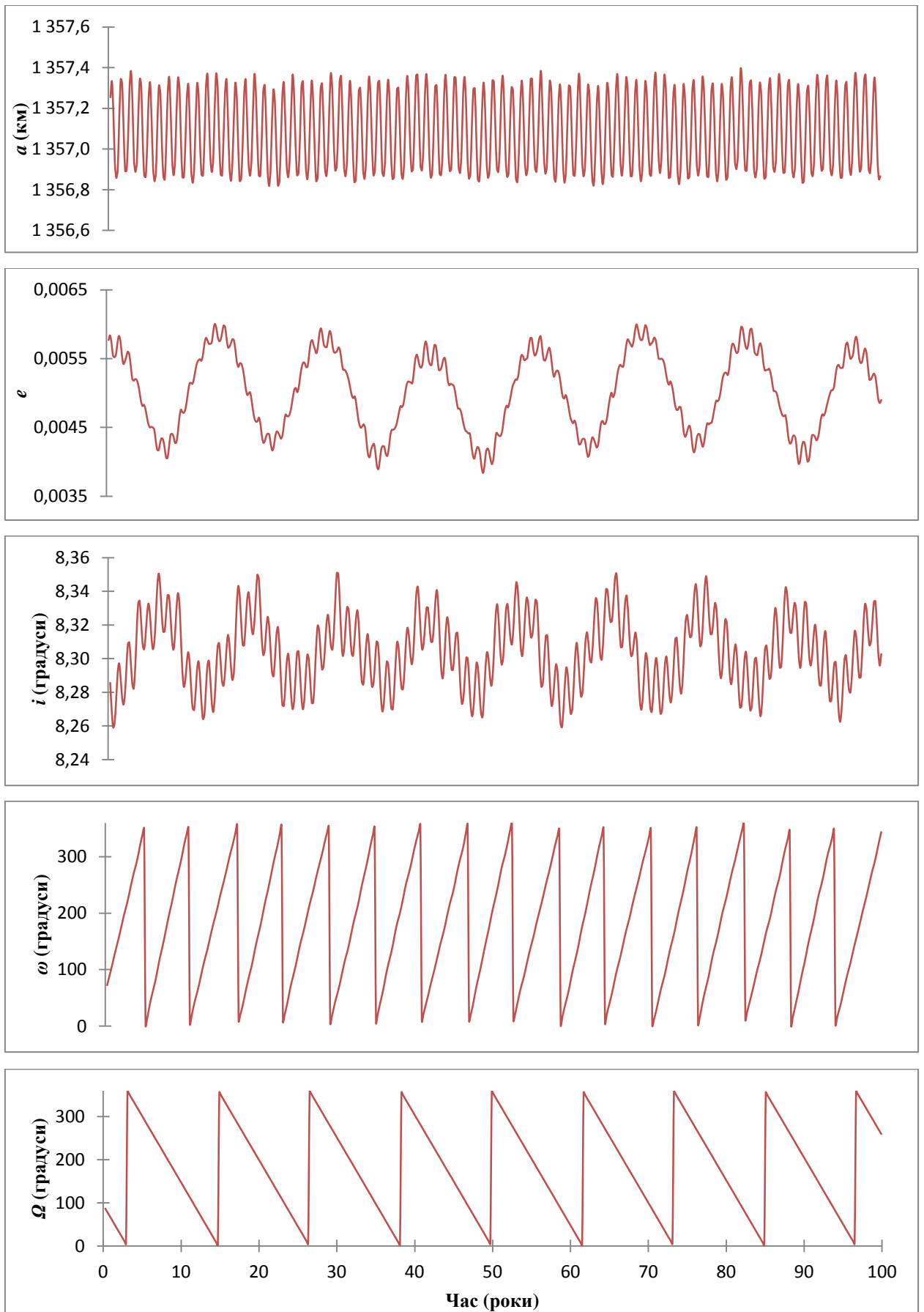


Рис. С.3. Велика піввісь, ексцентриситет, нахил, аргумент перигелію і довгота висхідного вузла для супутника "Romulus" астероїда (87) Sylvia.

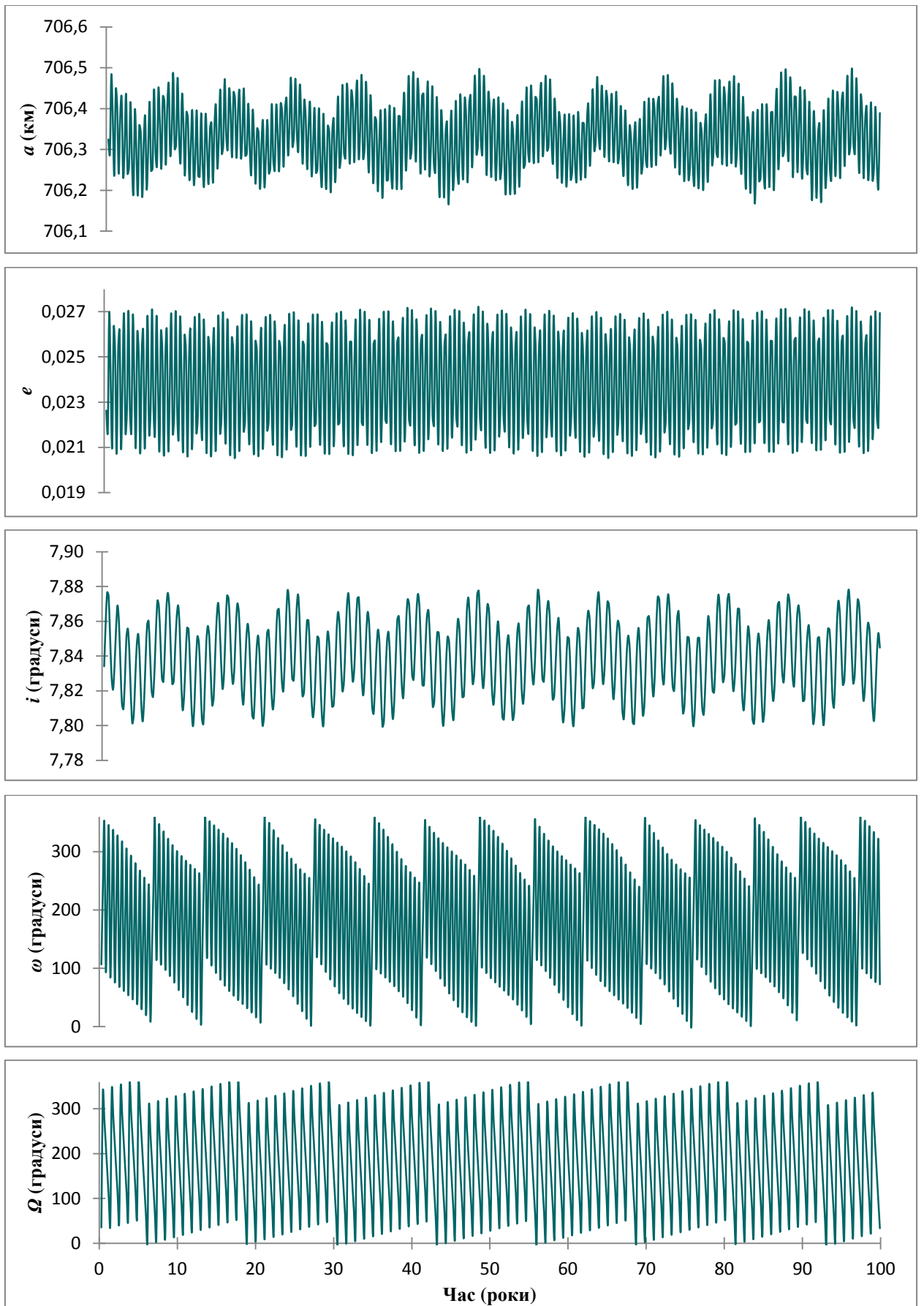


Рис. С.4. Велика піввісь, ексцентриситет, нахил, аргумент перигелію і довгота висхідного вузла для супутника "Remus" астероїда (87) Sylvia.

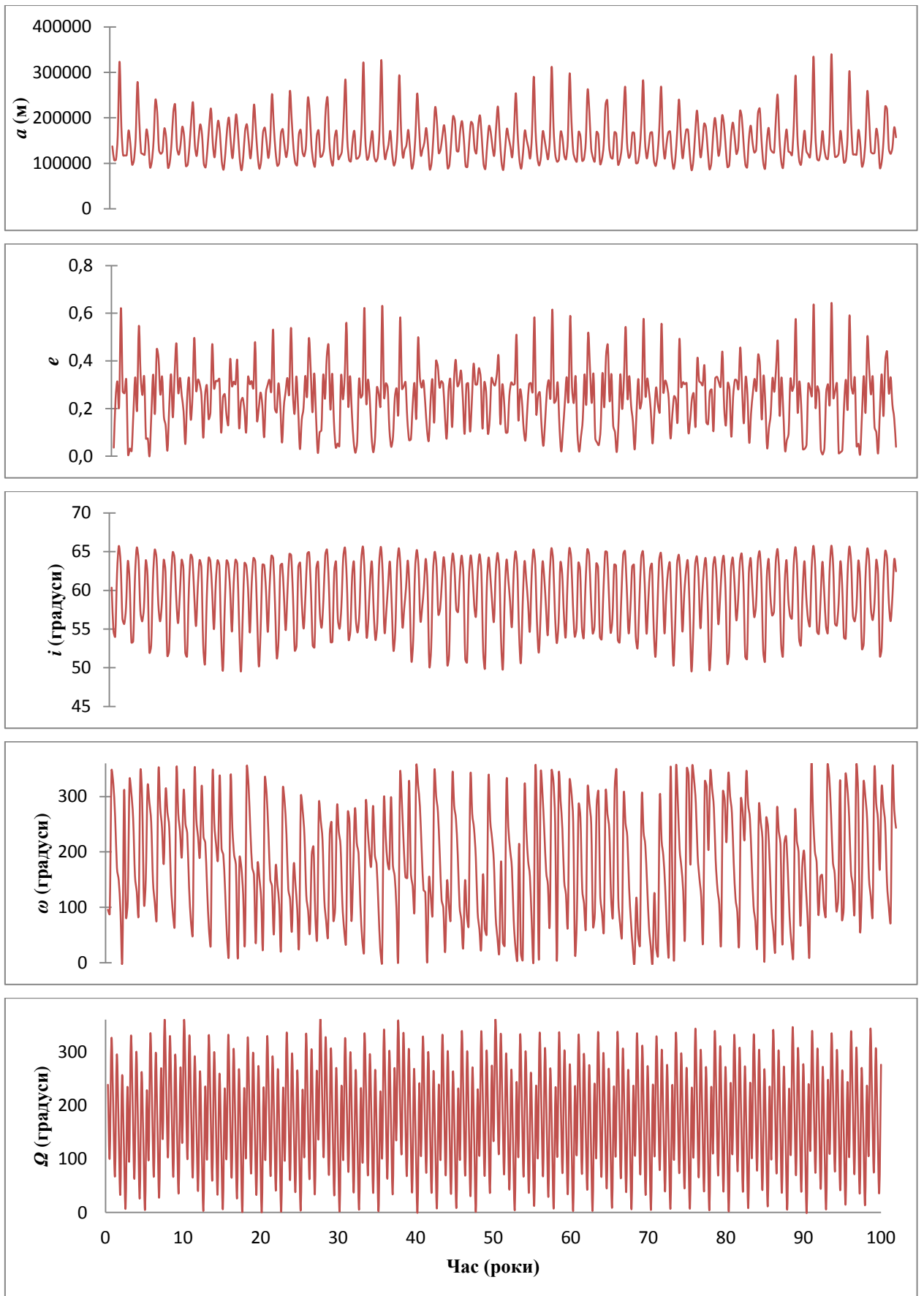


Рис. С.5. Велика піввісь, ексцентриситет, нахил, аргумент перигелію і довгота висхідного вузла для супутника "S/2000 (90) 1" астероїда (90) Antiope.

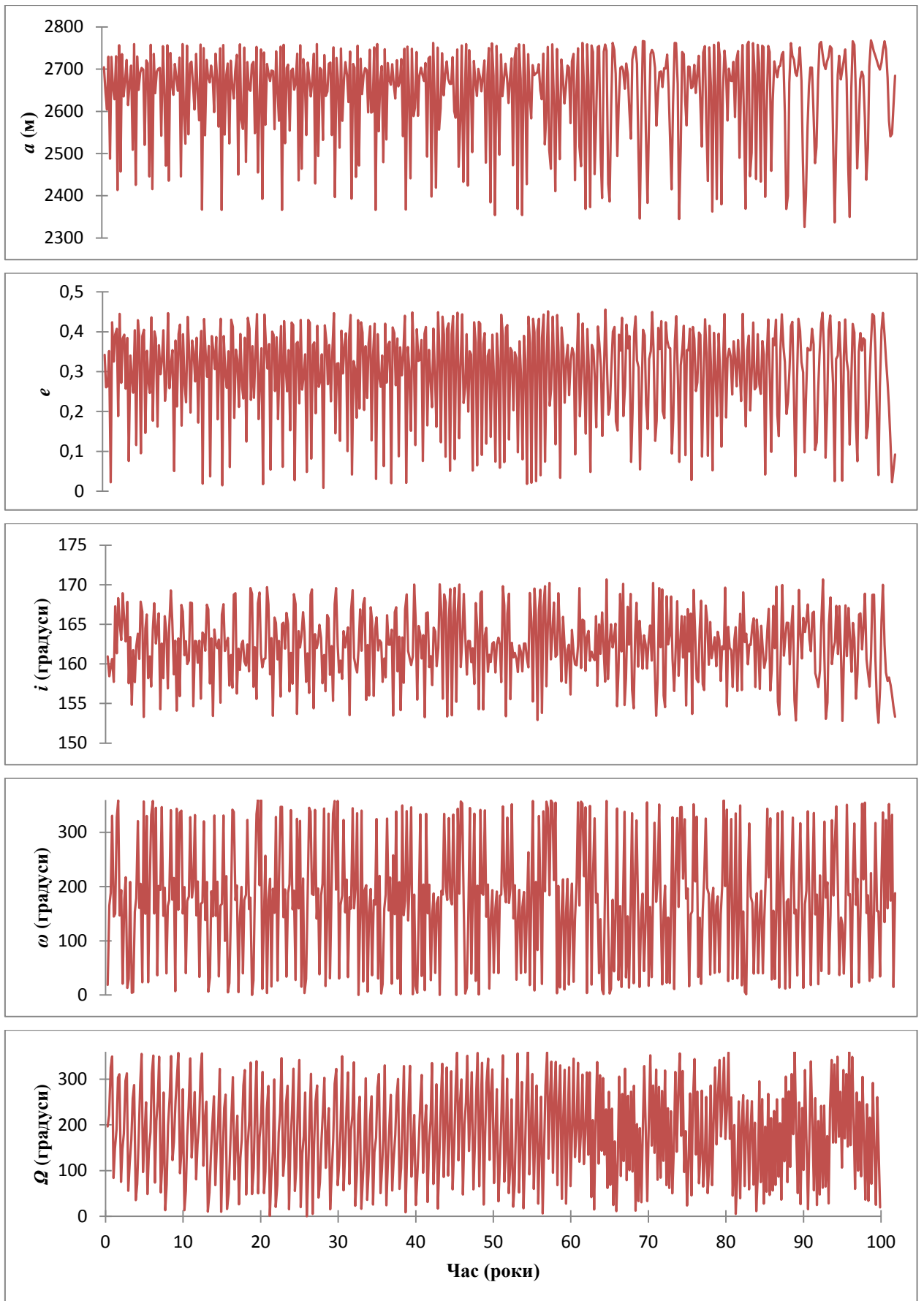


Рис. С.6. Велика піввісь, ексцентриситет, нахил, аргумент перигелію і довгота висхідного вузла для супутника "Beta" астероїда (66391) 1999 KW4.

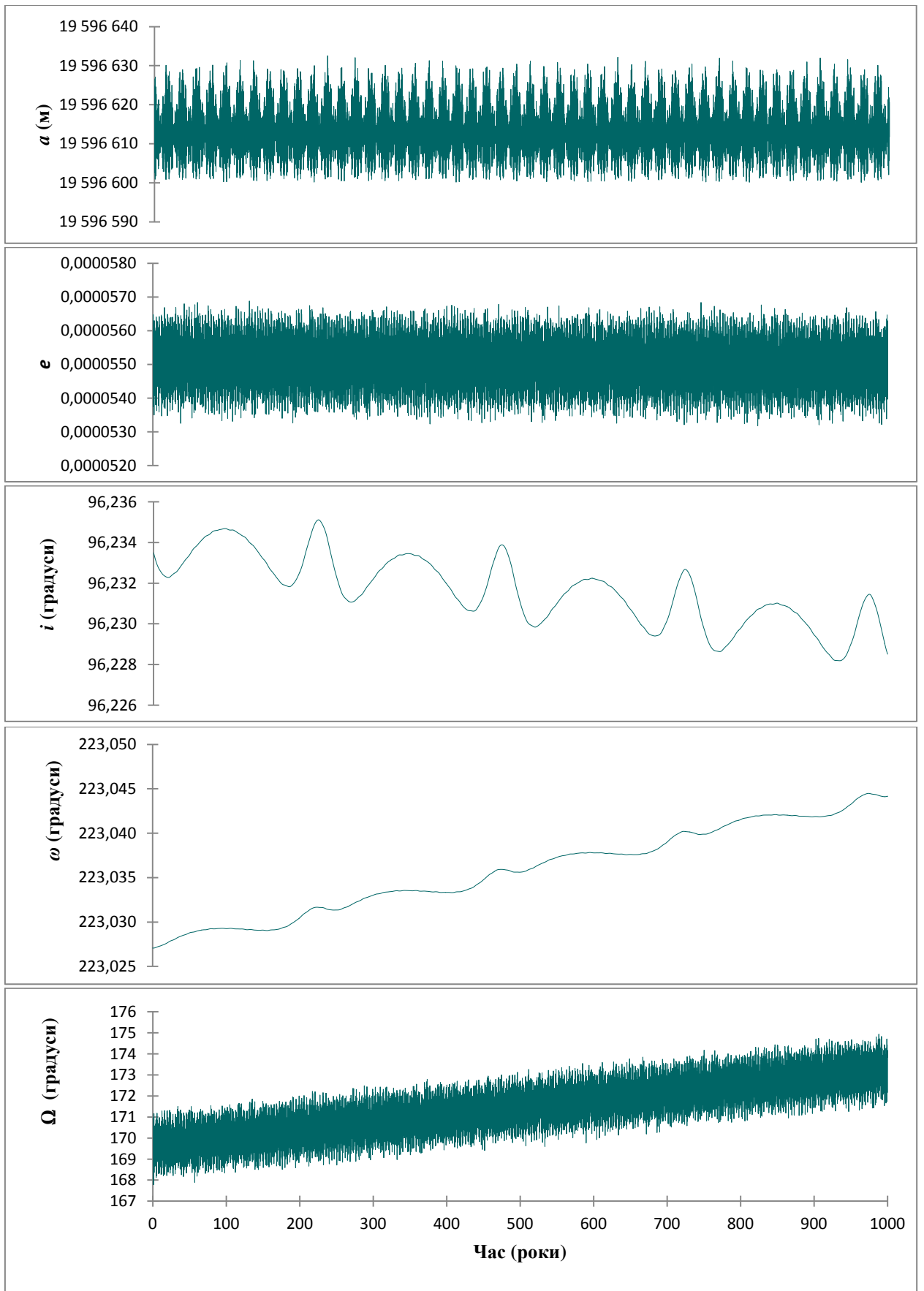


Рис. С.7. Велика піввісь, ексцентриситет, нахил, аргумент перигелію і довгота висхідного вузла для супутника "Charon" карликової планети (134340) Pluto.

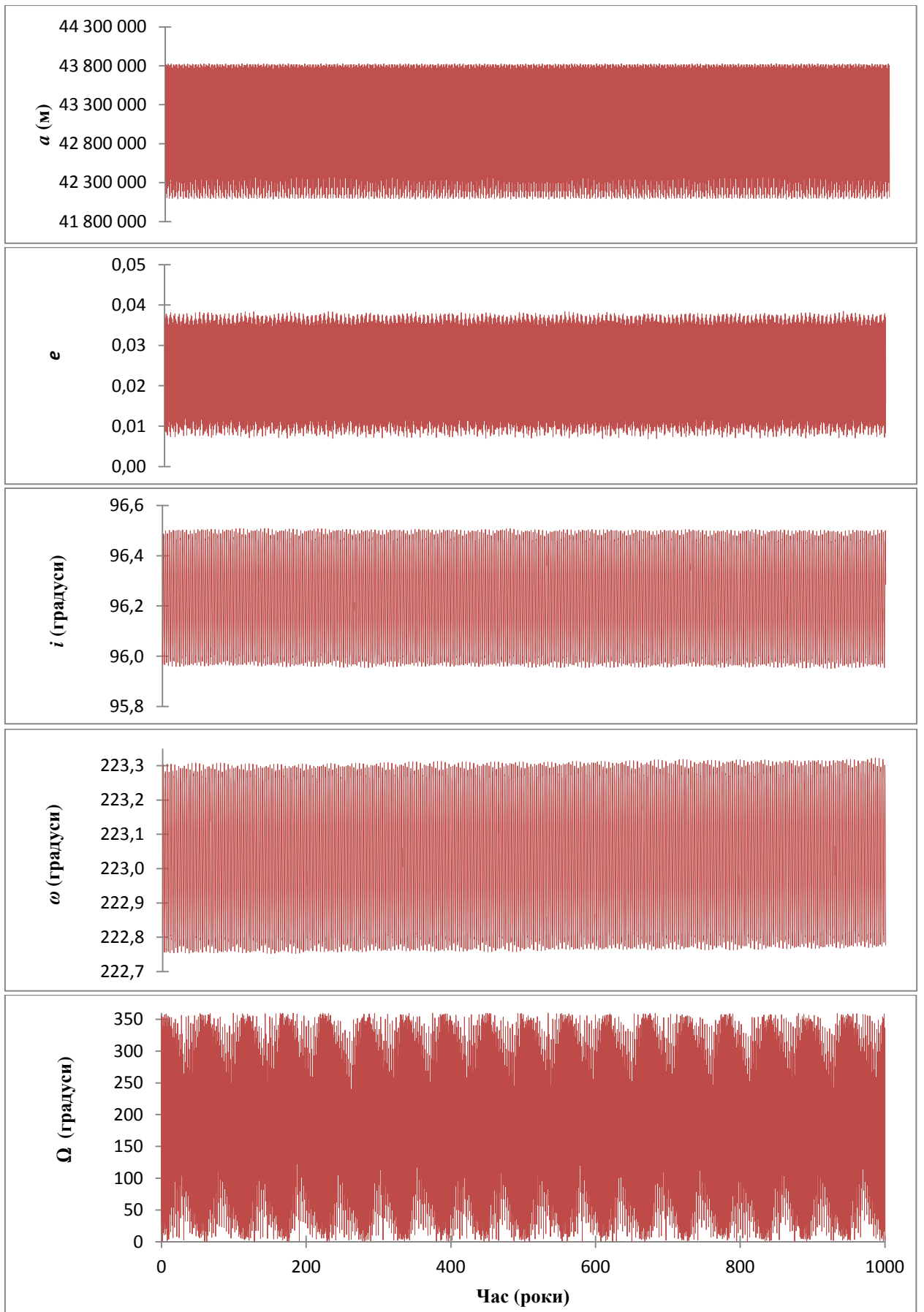


Рис.С.8. Велика піввісь, ексцентриситет, нахил, аргумент перигелію і довгота висхідного вузла для супутника "Styx" карликової планети (134340) Pluto.

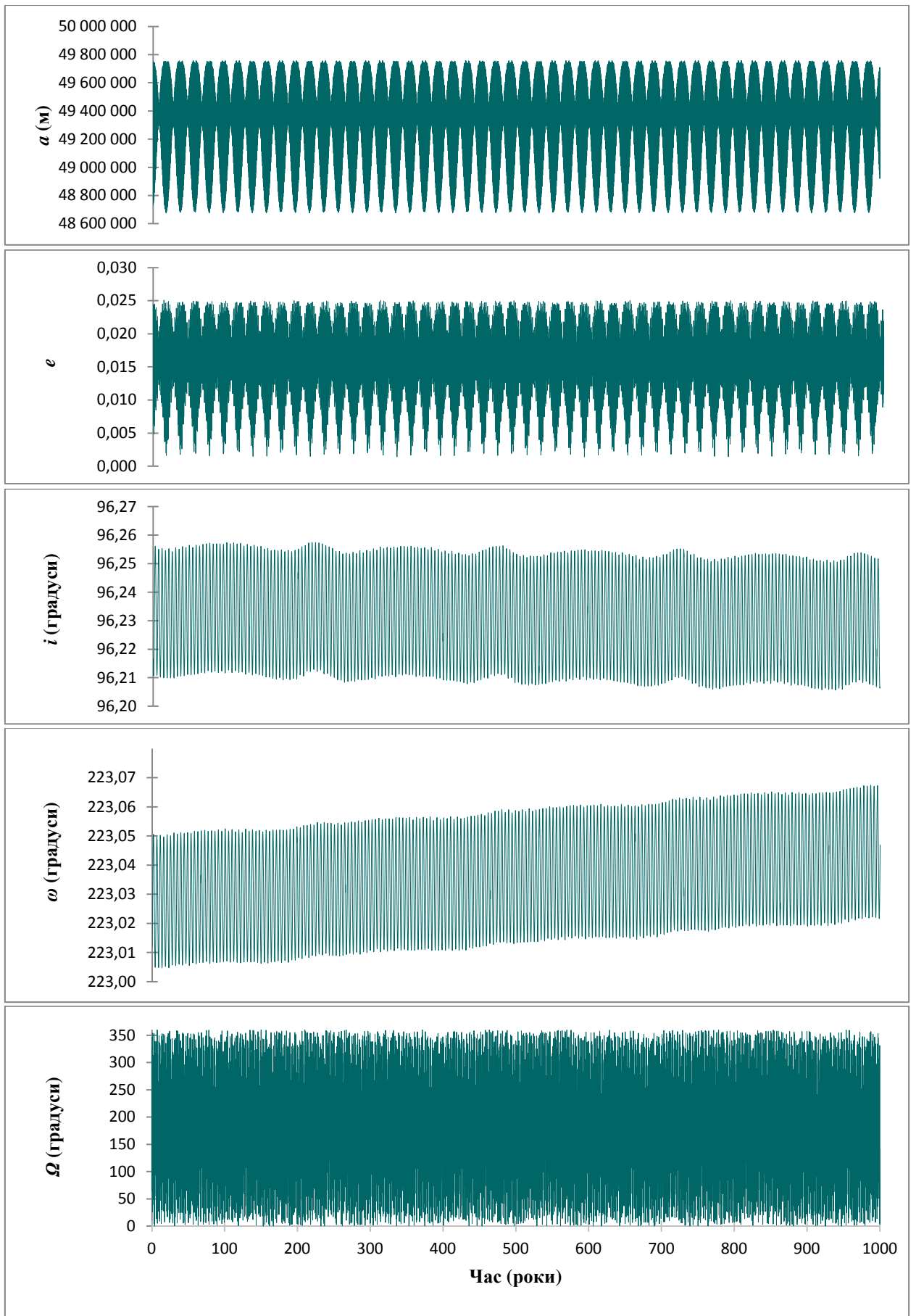


Рис. С.9. Велика піввісь, ексцентриситет, нахил, аргумент перигелію і довгота висхідного вузла для супутника "Nix" карликової планети (134340) Pluto.

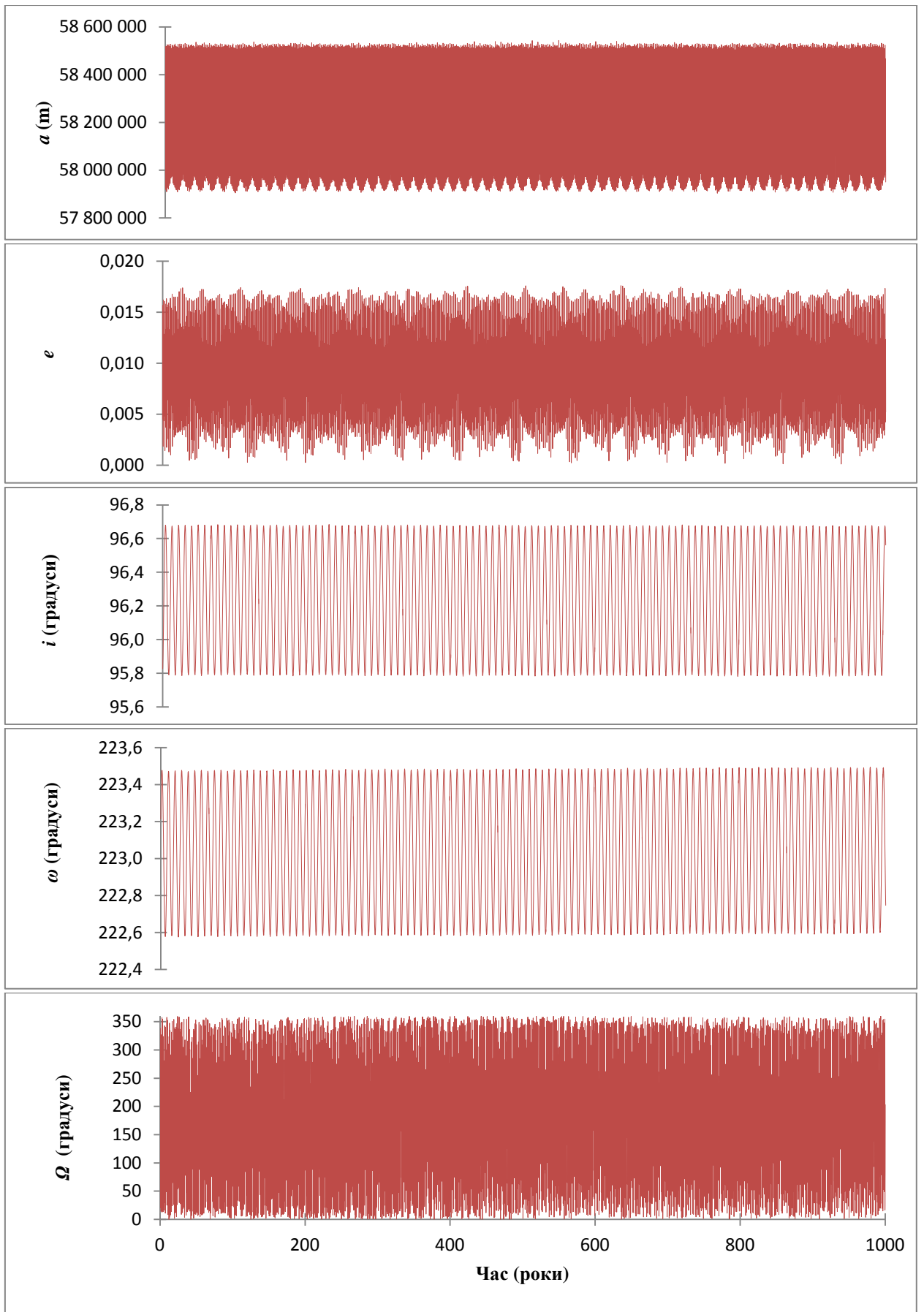


Рис. С.10. Велика піввісь, ексцентриситет, нахил, аргумент перигелію і довгота висхідного вузла для супутника "Kerberos" карликової планети (134340) Pluto.

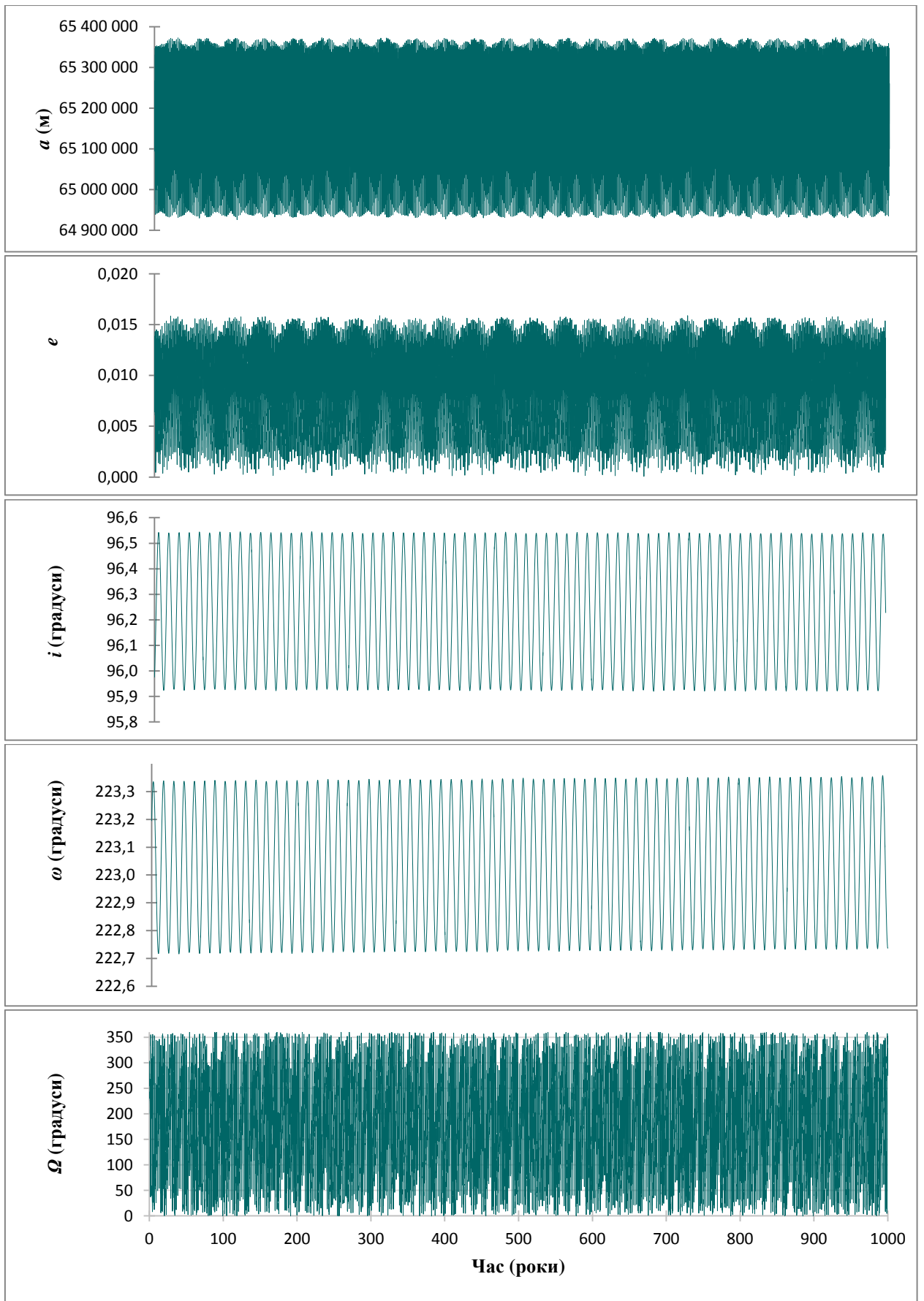


Рис. С.11. Велика піввісь, ексцентриситет, нахил, аргумент перигелію і довгота висхідного вузла для супутника "Hydra" карликової планети (134340) Pluto.

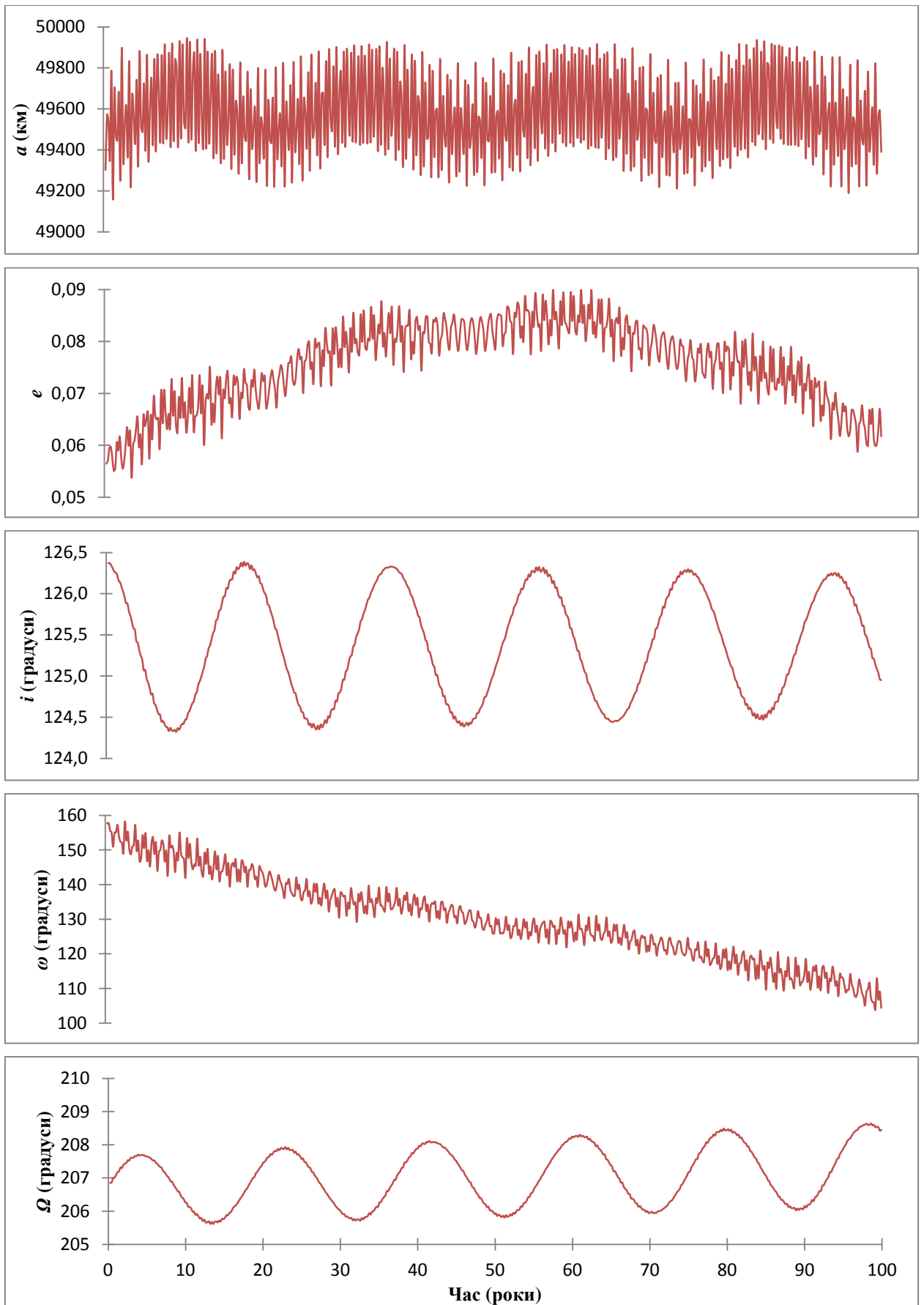


Рис. С.12. Велика піввісь, ексцентриситет, нахил, аргумент перигелію і довгота висхідного вузла для супутника "Ні'іака" транснептунового об'єкта (136108) Haumea.

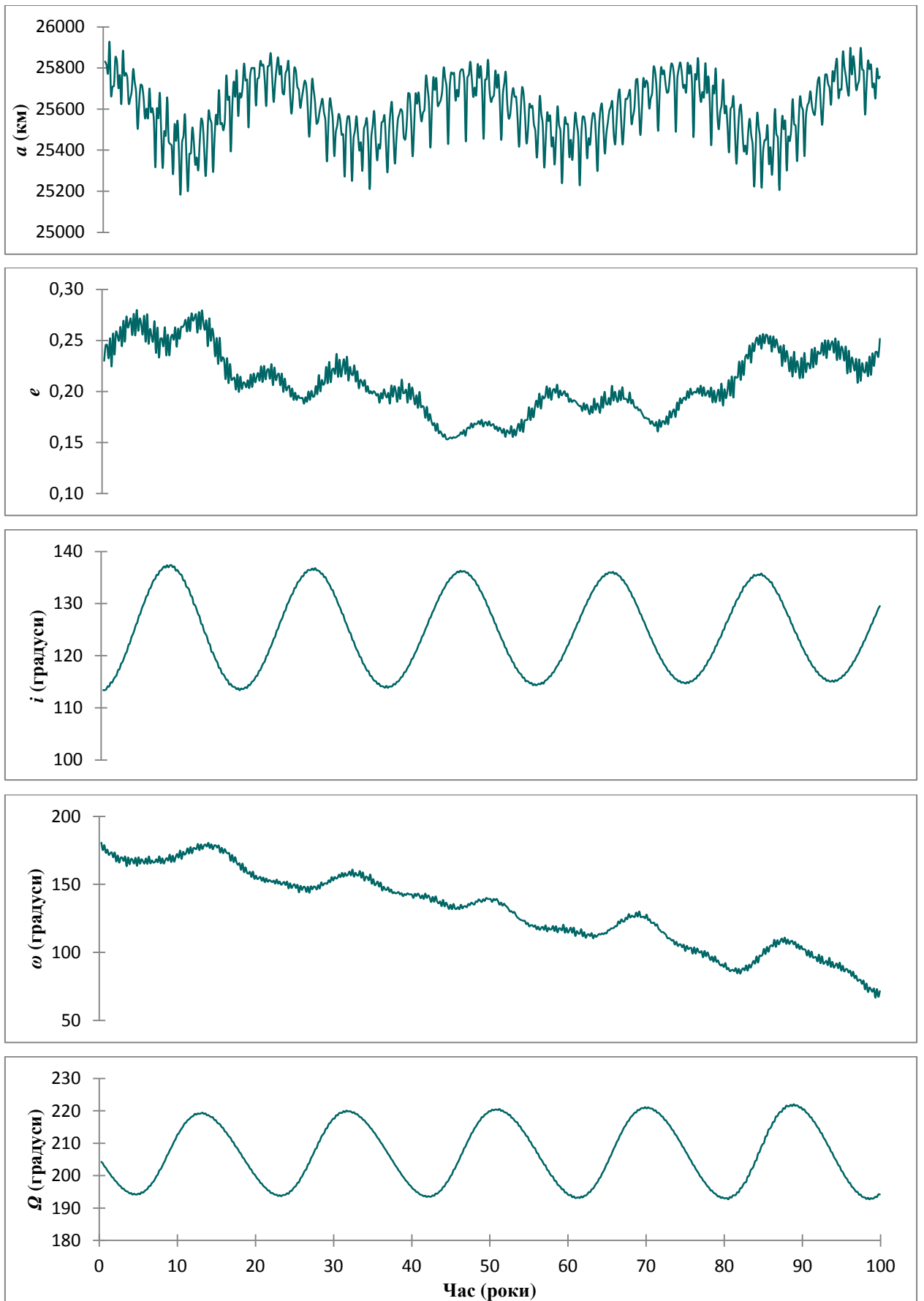


Рис. С.13. Велика піввісь, ексцентриситет, нахил, аргумент перигелію і довгота висхідного вузла для супутника "Намака" транснептунового об'єкта (136108) Haumea.

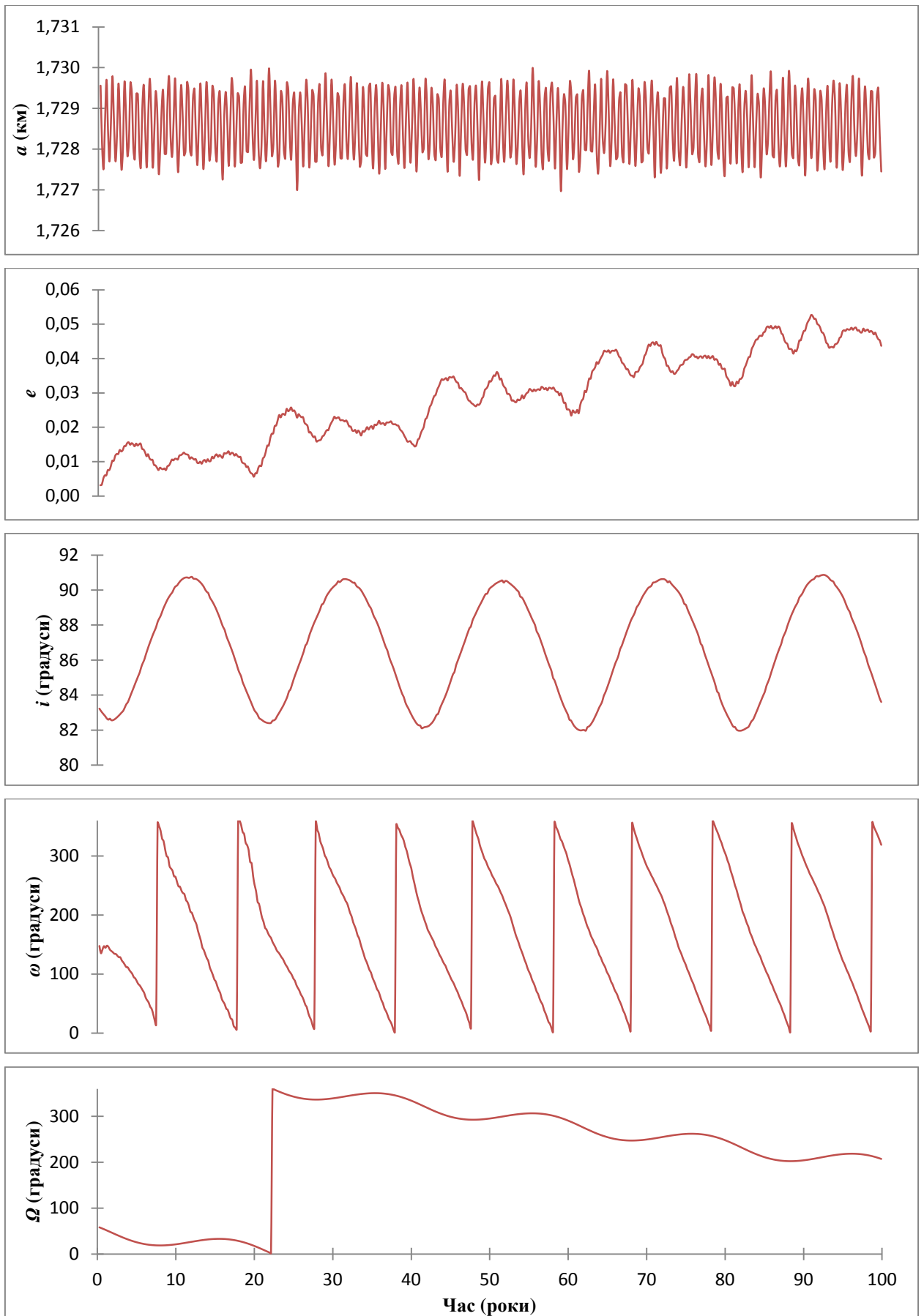


Рис. С.14. Велика піввісь, ексцентриситет, нахил, аргумент перигелію і довгота висхідного вузла для супутника "Beta" астероїда (136617) 1994 СС.

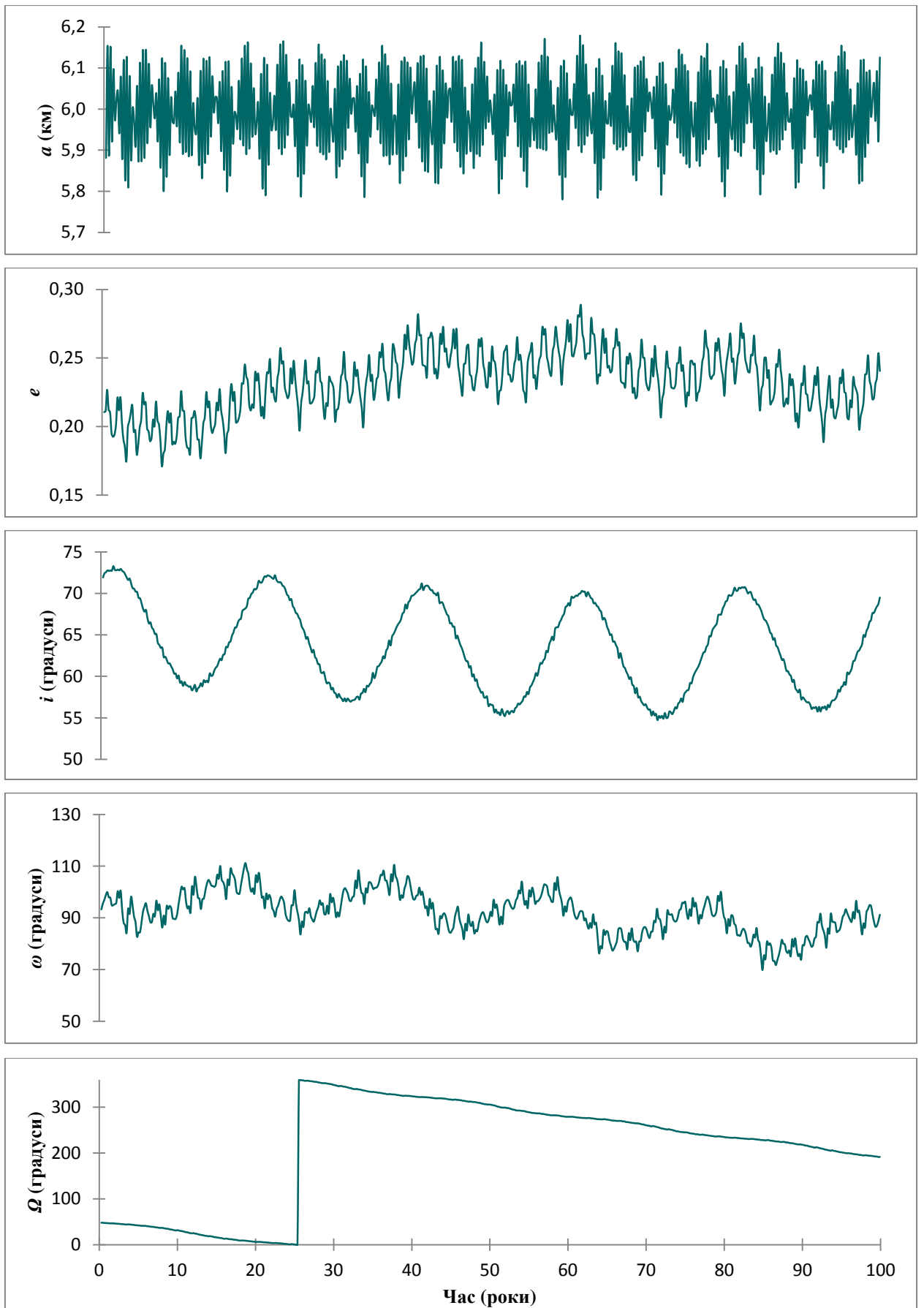


Рис. С.15. Велика піввісь, ексцентриситет, нахил, аргумент перигелію і довгота висхідного вузла для супутника "Gamma" астероїда (136617) 1994 CC.

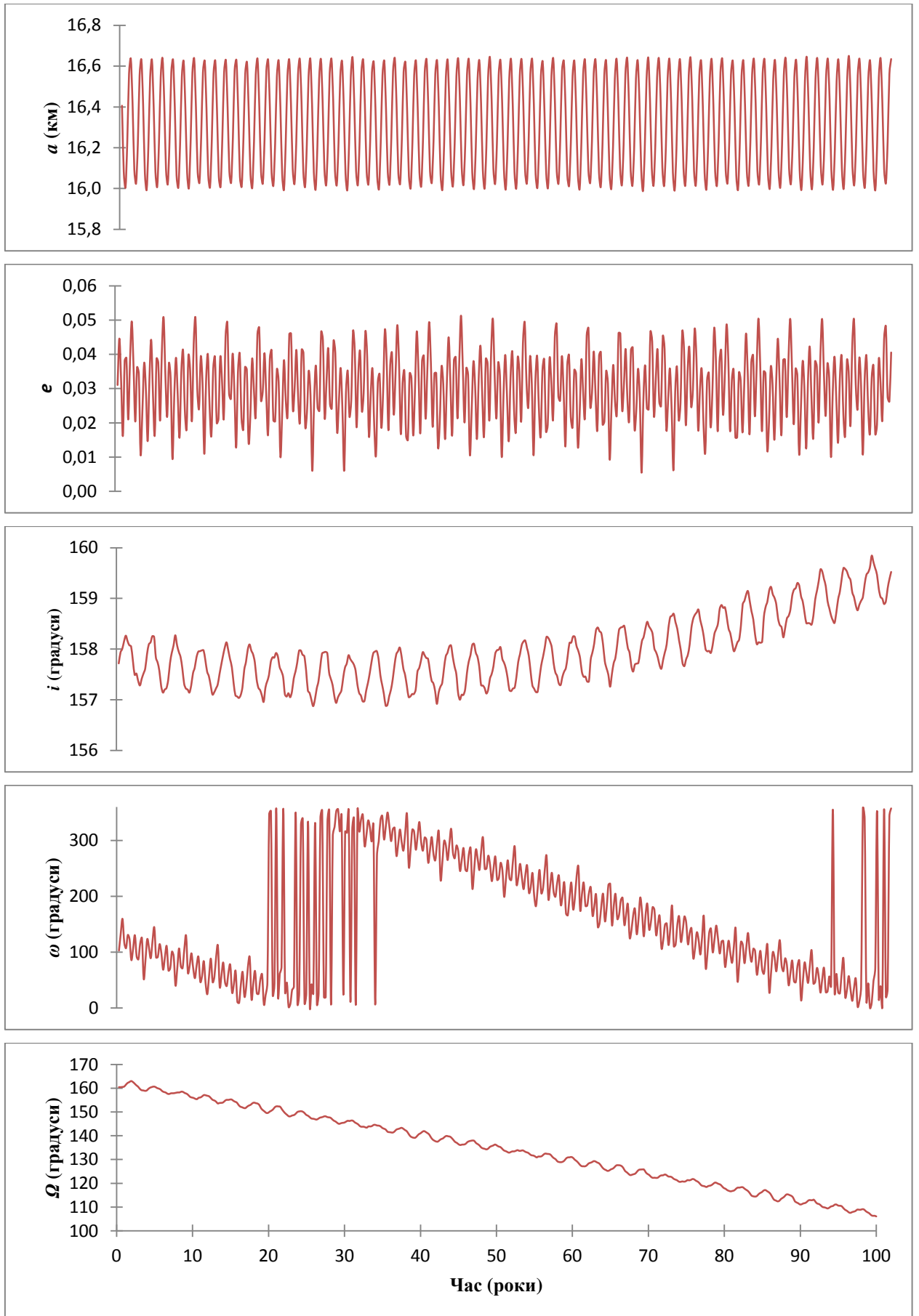


Рис. С.16. Велика піввісь, ексцентриситет, нахил, аргумент перигелію і довгота висхідного вузла для супутника "Beta" астероїда (153591) 2001 SN263.

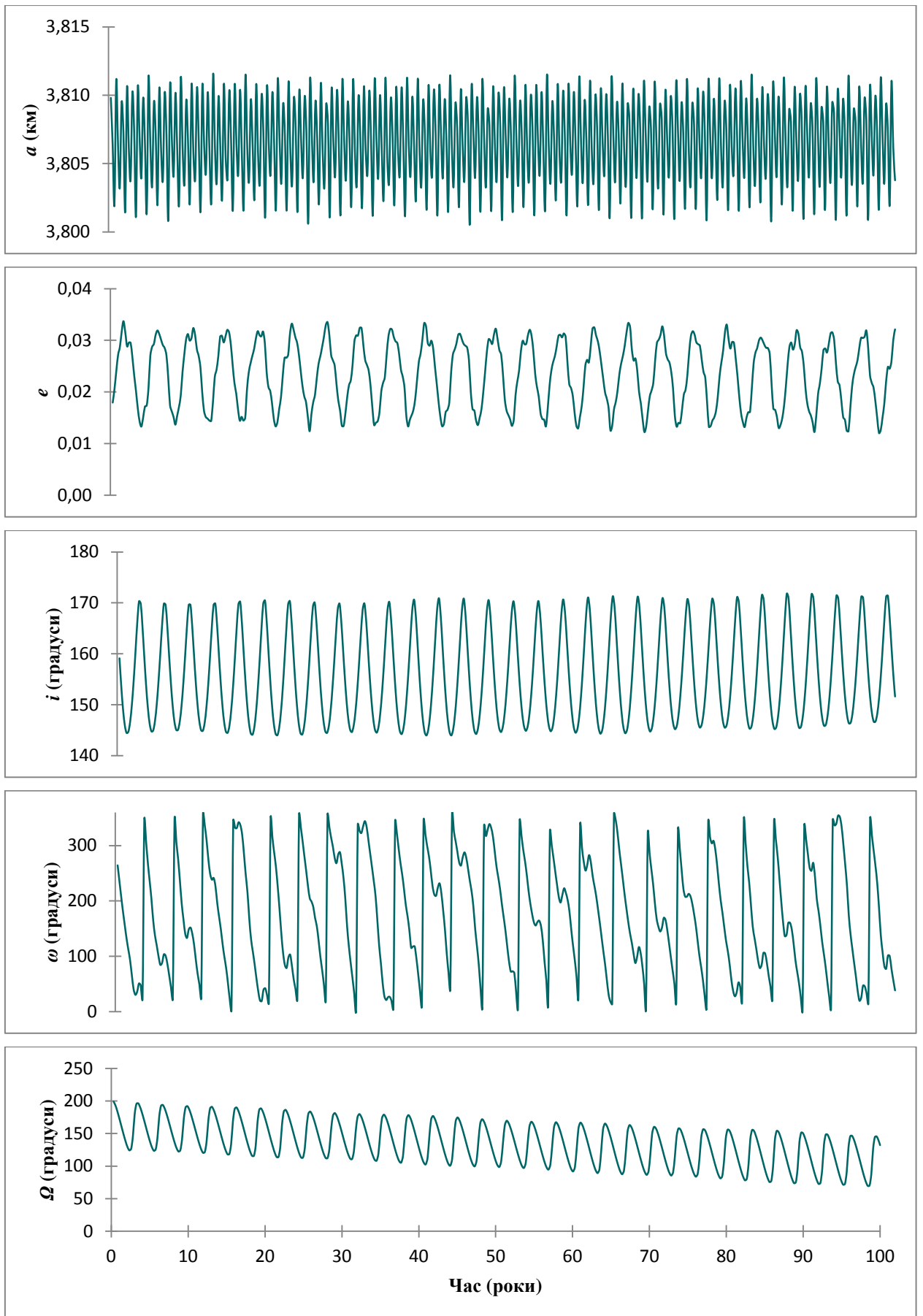


Рис. С.17. Велика піввісь, ексцентриситет, нахил, аргумент перигелію і довгота висхідного вузла для супутника "Gamma" астероїда (153591) 2001 SN263.

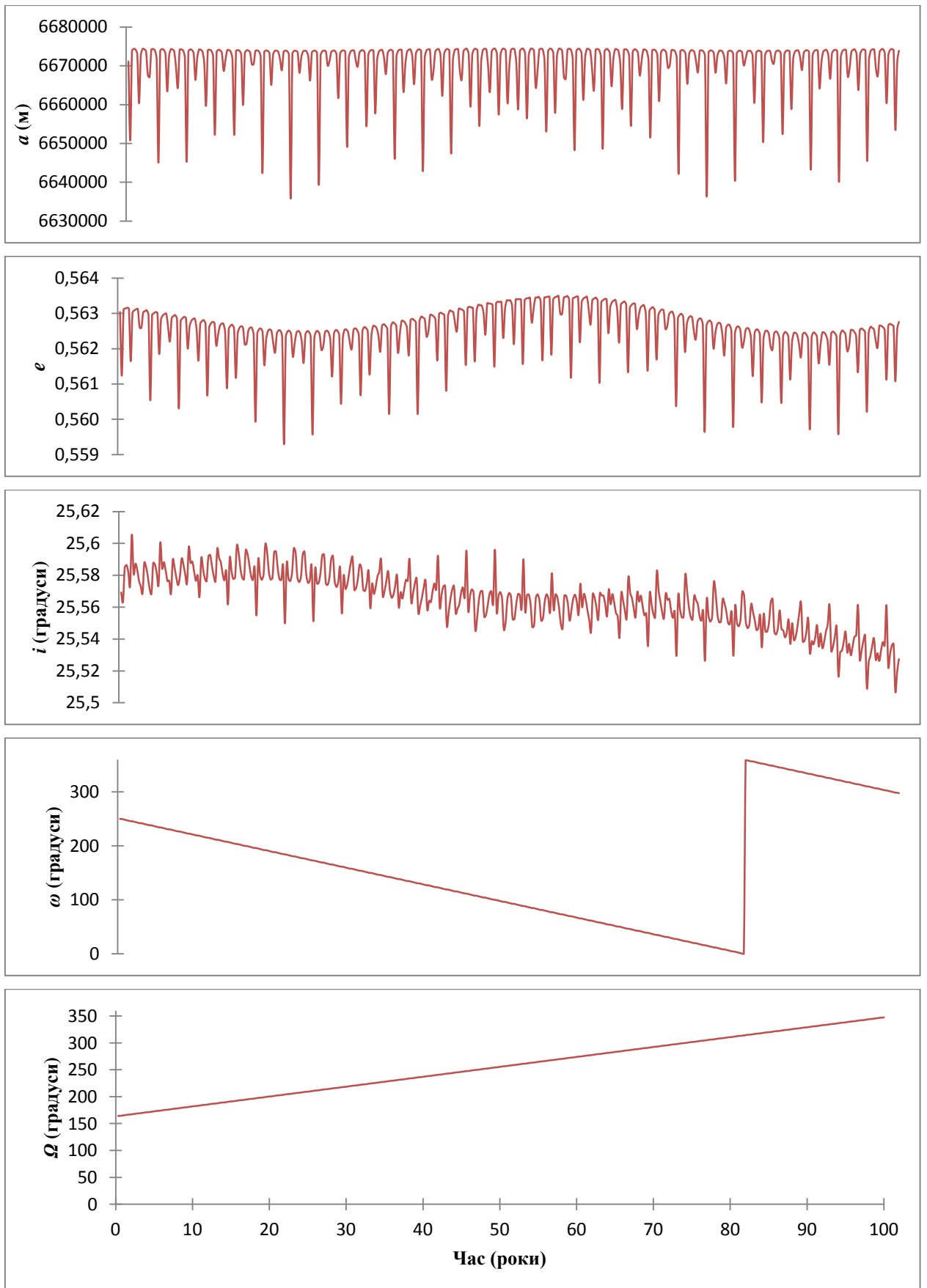


Рис. С.18. Велика піввісь, ексцентриситет, нахил, аргумент перигелію і довгота висхідного вузла для супутника "Thorondor" об'єкта (385446) Manwe.

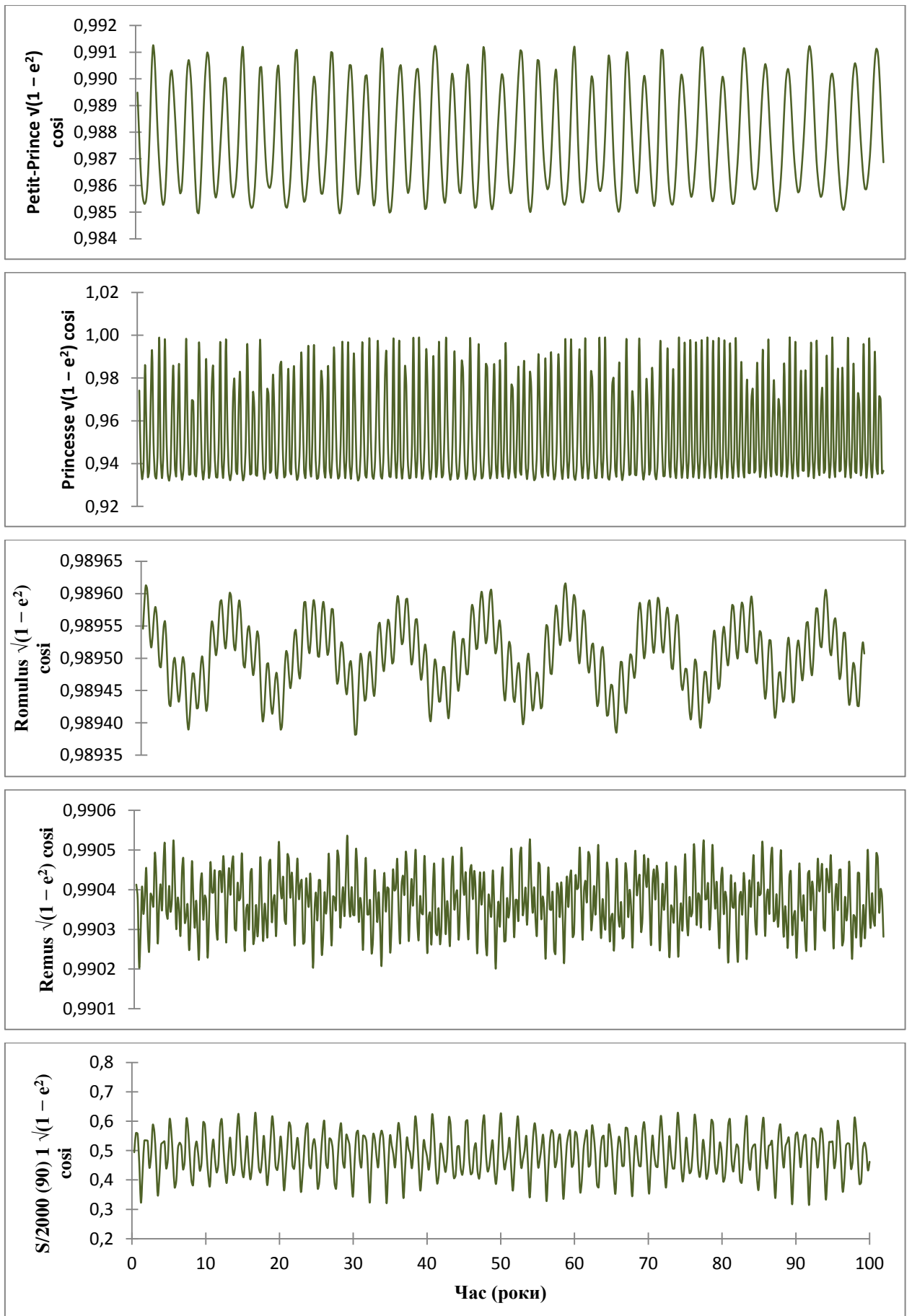


Рис. С.19. Ефект Kozai для супутників астероїдів (45) Eugenia, (87) Sylvia, (90) Antiope відповідно.

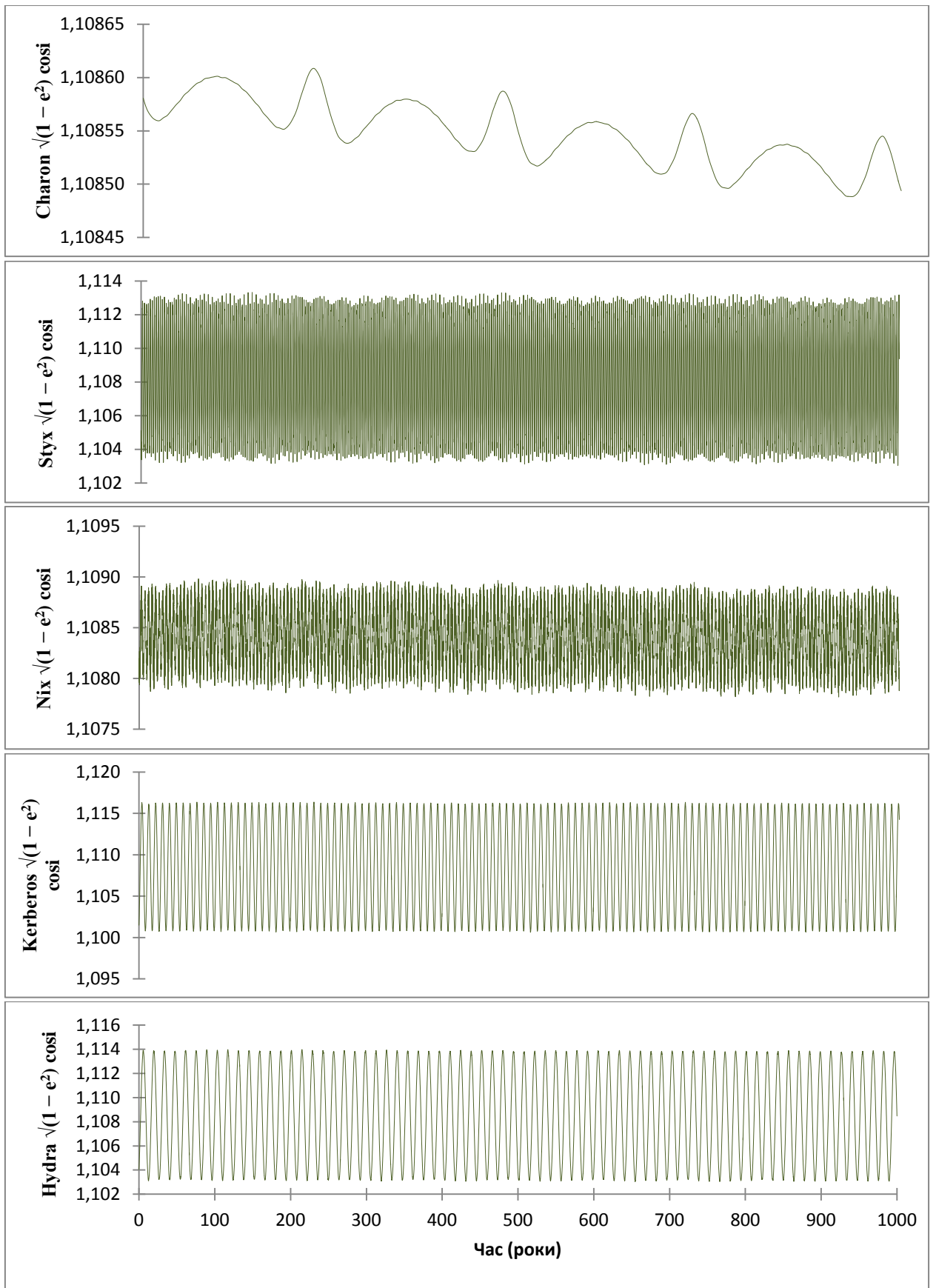


Рис. С.20. Ефект Kozai для супутників системи (134340) Pluto.

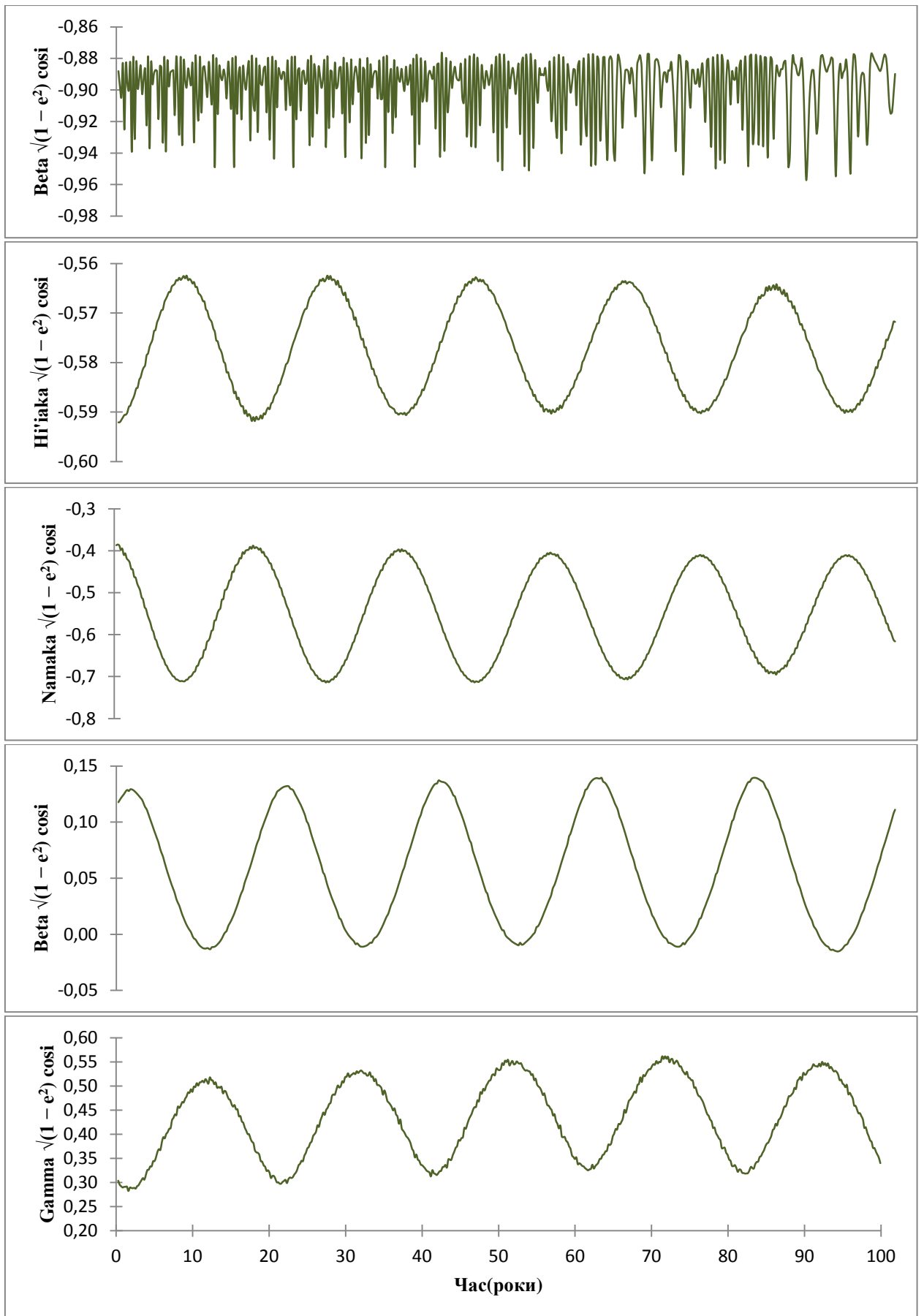


Рис. С.21. Ефект Kozai для супутників астероїдів (66391) 1999 KW4, (136108) Наумеа, (136617) 1994 СС відповідно.

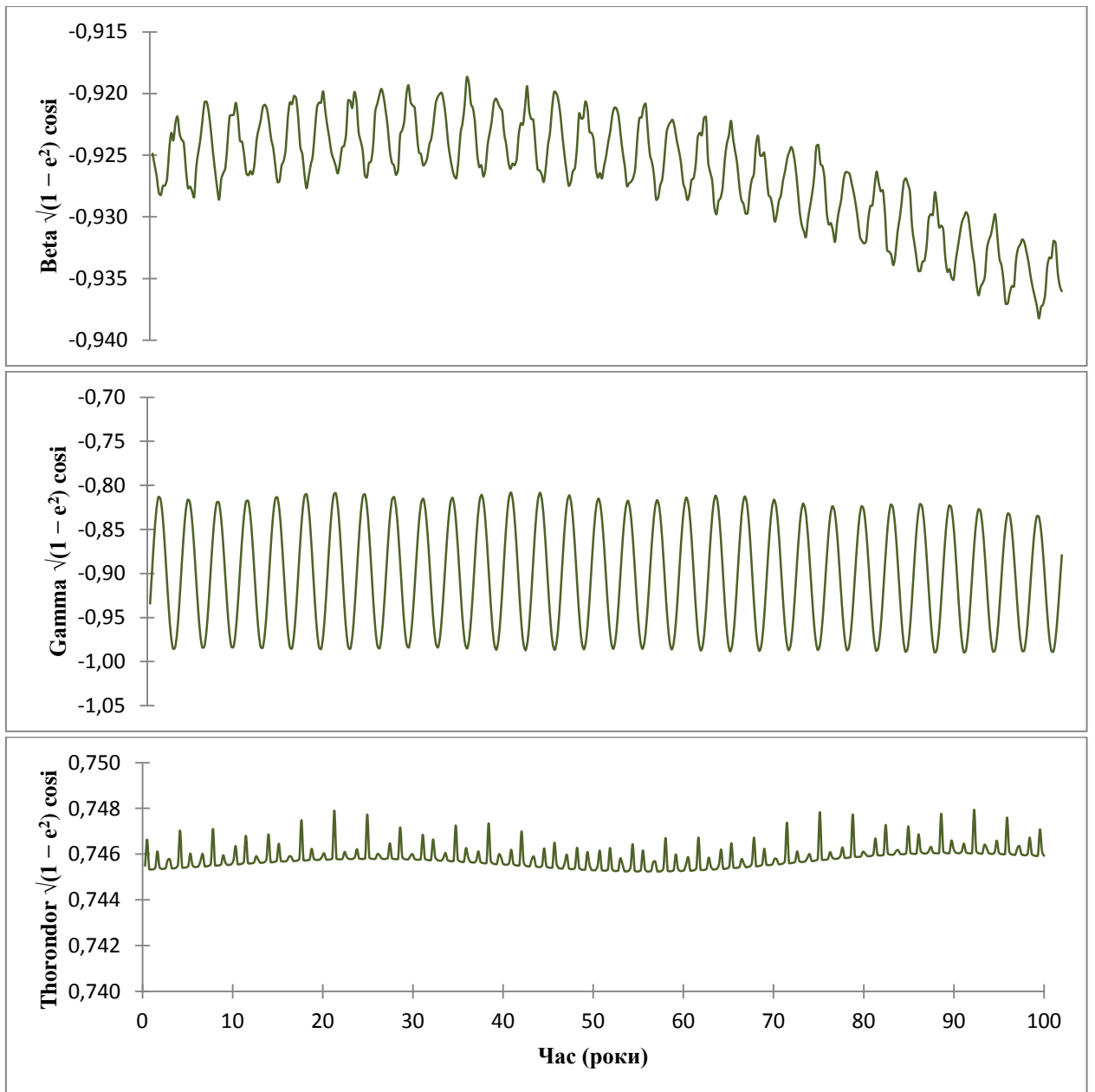


Рис. С.22. Ефект Kozai для супутників астероїдів (153591) 2001 SN263, (385446) Manwe відповідно.